

[I]

(1) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ について、

$$f'(x) = 1 \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2x \cdot (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} > 0$$

$$f''(x) = -\frac{3}{2} \cdot 2x \cdot (1+x^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$= -\frac{3x}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

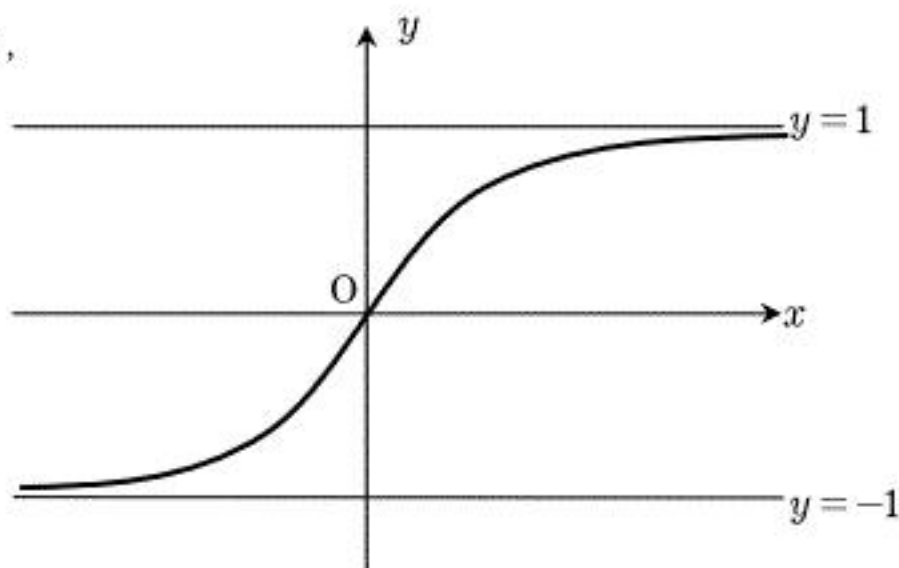
x	$(-\infty)$	$\cdots$	0	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		+		+	
$f''(x)$		+	0	-	
$f(x)$	(-1)	$\nearrow$	0	$\searrow$	(1)

よって関数 $f(x)$ の増減は右の表のようになり、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} = -1$$

とで右のようなグラフとなる。



(2) $t > 0$ のとき、 $x = f'(t)$, $y = f(t) - tf'(t)$ について、

$$\frac{dx}{dt} = f''(t) = -\frac{3t}{(1+t^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{dy}{dt} = f'(t) - \{1 \cdot f'(t) + t \cdot f''(t)\} = -tf''(t) = \frac{3t^2}{(1+t^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (-t) = -\frac{dt}{dx} = \frac{(1+t^2)^{\frac{5}{2}}}{3t} (> 0)$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} x = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} = 1$$

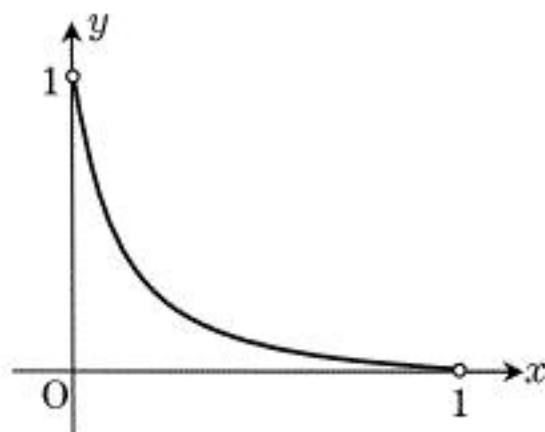
$$\lim_{t \rightarrow \infty} x = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} y = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{t^3}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^3}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{t^2} + 1\right)\sqrt{\frac{1}{t^2} + 1}} = 1$$

よって右上のような増減となり、
曲線の概形は右図。

t	(0)	$\cdots$	(∞)
$\frac{dx}{dt}$		-	
$\frac{dy}{dt}$		+	
(x, y)	$(1, 0)$	$\nearrow$	$(0, 1)$



(3) 曲線上の点 $(f'(t), f(t) - tf'(t))$ における接線の方程式は、

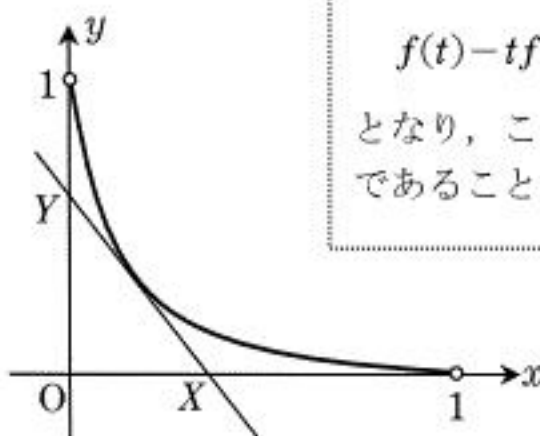
$$y = -t(x - f'(t)) + f(t) - tf'(t) \\ = -tx + f(t)$$

この接線の x 切片, y 切片をそれぞれ X, Y とすると、

$$X = \frac{f(t)}{t}, \quad Y = f(t)$$

だから、

$$X^2 + Y^2 = \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 + \{f(t)\}^2 \\ = \{f(t)\}^2 \frac{1+t^2}{t^2} \\ = \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{t^2} \\ = 1$$



$t = \tan \theta$ とすると

$$\frac{1}{1+t^2} = \cos^2 \theta$$

だから、

$$f'(t) = \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \cos^3 \theta$$

$$f(t) - tf'(t) = t^3 \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \sin^3 \theta$$

となり、この曲線はアステロイド曲線であることが分かる。

だから一定である。 …証明終わり

[Ⅱ]

$$(1) \quad (a+b\sqrt{2})(x+y\sqrt{2})=u+v\sqrt{2} \text{ より } (ay+bx-v)\sqrt{2}=u-(ax+2by)$$

$ay+bx-v \neq 0$ とすると $\sqrt{2} = \frac{u-(ax+2by)}{ay+bx-v}$ となるが、左辺は無理数、右辺は有理数となり矛盾。

よって $ay+bx-v=0$ であり、このとき $u-(ax+2by)=0$ である。従って、

$$u=ax+2by, \quad v=ay+bx \quad \cdots \text{答}$$

また、

$$\begin{aligned} u^2-2v^2 &= (ax+2by)^2 - 2(ay+bx)^2 \\ &= a^2x^2 + 4abxy + 4b^2y^2 - 2(a^2y^2 + 2abxy + b^2x^2) \\ &= (a^2-2b^2)x^2 - 2(a^2-2b^2)y^2 \\ &= x^2 - 2y^2 \\ &= 1 \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

$$(2) \quad x^2 - 2y^2 = 1 \quad \cdots \text{①} \quad 1 < x+y\sqrt{2} \leq 3+2\sqrt{2} \quad \cdots \text{②}$$

について、②より、

$$x+y\sqrt{2} = \frac{(x+y\sqrt{2})(x-y\sqrt{2})}{x-y\sqrt{2}} = \frac{x^2-2y^2}{x-y\sqrt{2}} = \frac{1}{x-y\sqrt{2}} \quad (\text{①より})$$

だから、 $1 < \frac{1}{x-y\sqrt{2}} \leq 3+2\sqrt{2}$ である。

$$\therefore \frac{1}{3+2\sqrt{2}} \leq x-y\sqrt{2} < 1 \quad \text{つまり、} 3-2\sqrt{2} \leq x-y\sqrt{2} < 1 \quad \cdots \text{③}$$

②、③より

$$4-2\sqrt{2} < 2x < 4+2\sqrt{2}$$

$$\therefore 2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}$$

従って $x=1, 2, 3$ のいずれかであるが、

$x=1$ のとき①より $y^2=0$ となり $y=0$ であるが②を満たさない。

$x=2$ のとき①より $2y^2=3$ となり y は整数ではない。

よって $x=3$ であり、このとき①より $y^2=4$ より $y=\pm 2$

$y=-2$ のとき②から $3-2\sqrt{2} < 1$ なので②を満たさない。よって $y=2$ であり、これは②を満たす。

以上より $x=3, \quad y=2 \quad \cdots \text{証明終わり}$

$$(3) \quad (3+2\sqrt{2})^{n-1} < x+y\sqrt{2} \leq (3+2\sqrt{2})^n \text{ のとき } x+y\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})^n \quad \cdots \text{④}$$

④が $n \geq 1$ で成立することを数学的帰納法にて証明する。

(i) $n=1$ のとき、(2)の結果より、

$$1 < x+y\sqrt{2} \leq 3+2\sqrt{2} \text{ のとき } x=3, \quad y=2 \text{ だから } x+y\sqrt{2} = 3+2\sqrt{2}$$

は成立する。

(ii) $n=k (k \geq 1)$ のとき、

$$(3+2\sqrt{2})^{k-1} < x+y\sqrt{2} \leq (3+2\sqrt{2})^k \text{ のとき } x+y\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})^k$$

と仮定する。このとき、

$$(3+2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^{k-1} < \underline{(3+2\sqrt{2})(x+y\sqrt{2})} \leq (3+2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^k$$

について(1)の結果で $a=3, \quad b=2$ としたものを考えることで、

$$\underline{(3+2\sqrt{2})(x+y\sqrt{2})} = u+v\sqrt{2}, \quad u^2-2v^2=1, \quad u, v \text{ は整数}$$

だから、

$$(3+2\sqrt{2})^k < u+v\sqrt{2} \leq (3+2\sqrt{2})^{k+1}$$

が成立し、仮定より、

$$u+v\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})(x+y\sqrt{2}) = (3+2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^k = (3+2\sqrt{2})^{k+1}$$

なので④は $n=k+1$ でも成立する。以上より、

$$\text{自然数 } n \text{ に対して、} (3+2\sqrt{2})^{n-1} < x+y\sqrt{2} \leq (3+2\sqrt{2})^n \text{ のとき } x+y\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})^n$$

である。 $\cdots \text{証明終わり}$

[III]

(1) $f(x)=0$ と $g(x)=0$ の共通解を $x=\alpha$ とすると、

$$f(\alpha)=g(\alpha)=0$$

が成立する。よって、

$$\alpha^2+a\alpha+1=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$-\alpha^2-b\alpha+1=0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①+②より、

$$(a-b)\alpha+2=0$$

$$\therefore \alpha = \frac{2}{b-a} \quad \left(\text{これは結果である } a^2-b^2=4 \text{ より } -\frac{a+b}{2} \text{ に一致する} \right)$$

これを① (または②) へ代入して、

$$a^2-b^2=4 \quad \cdots \text{答}$$

(2) (1)の結果より $a>0$ である。 $f(x)=g(x)$ を解くと、

$$2x^2+(a+b)x=0$$

$$\text{より } x=0, \quad -\frac{a+b}{2}$$

$$\alpha \neq 0 \text{ だから、 } \alpha = -\frac{a+b}{2} \quad (<0)$$

接線 l の方程式は、 $f'(x)=2x+a$ より

$$y=(2\alpha+a)(x-\alpha)+0$$

$$=-b(x-\alpha)$$

これと $y=g(x)$ の共有点の x 座標は、

$$-x^2-bx+1=-bx+b\alpha$$

$$\Leftrightarrow x^2=1-b\alpha$$

②より、

$$x^2=\alpha^2 \text{ から } x=\pm\alpha$$

よって $y=g(x)$ と l で囲まれる部分の面積 S は、

$$S = \int_{\alpha}^{-\alpha} \{ (-x^2-bx+1) - (-bx+b\alpha) \} dx$$

$$= \int_{\alpha}^{-\alpha} -(x-\alpha)(x+\alpha) dx$$

$$= \frac{1}{6}(-\alpha-\alpha)^3$$

$$= \frac{4}{3}(-\alpha)^3$$

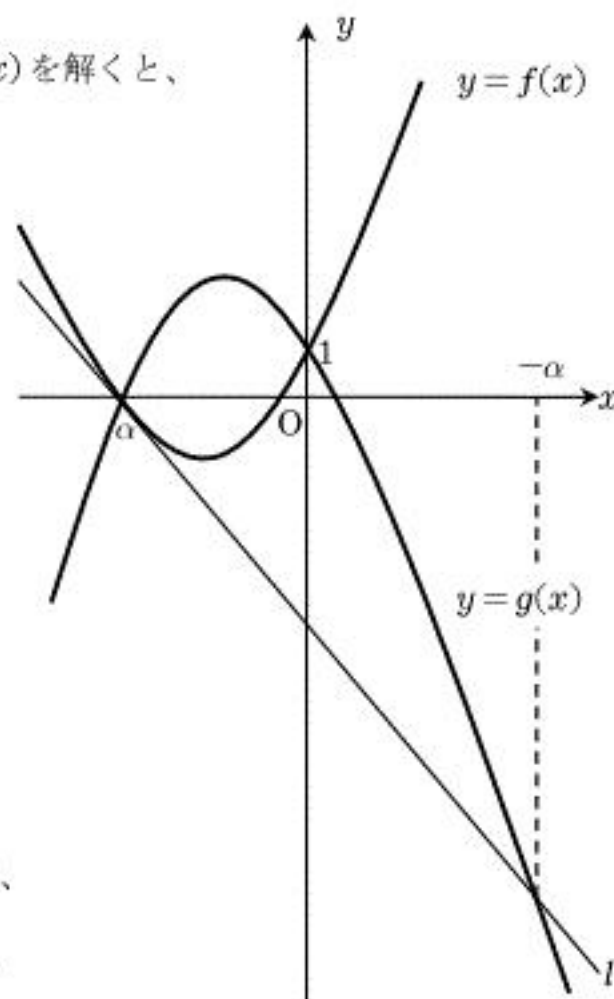
そこで

$$-\alpha = \frac{a+b}{2} = \frac{b+\sqrt{b^2+4}}{2}$$

について、これは b の増加関数であるから $b=0$ で最小となる。よって、

$$S \geq \frac{4}{3} \left(\frac{0+\sqrt{0^2+4}}{2} \right)^3 = \frac{4}{3}$$

$$S \text{ の最小値は } \frac{4}{3} (a=2, b=0 \text{ のとき}) \quad \cdots \text{答}$$



$K=1$ のとき、 B が 2 を出せば 1 以下であることがわかり、 B は $K(=1)$ を確定できる。

$K=N$ のとき、 B が N を出せば N 以上であることがわかり、 B は $K(=N)$ を確定できる。

$2 \leq K \leq N-1$ のとき、

B が K を出せば K 以上であることがわかり、 B が $K+1$ を出せば K 以下であることが分かる。

つまり、 K と $K+1$ を共に出せば B は K を確定できる。

(1) B が 2 を出せば $K=1$ と確定できる。

$P_3(1)$ は 1 回目に B が 2 を出した場合で、

$$P_3(1) = \frac{1}{3} \quad \cdots \text{答}$$

2 回目にちょうど確定できる確率を求める。1 回目に 1 または 3、2 回目に 2 を出す確率は、

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

よって、求める確率は、

$$P_3(2) = P_3(1) + \frac{2}{9} = \frac{5}{9} \quad \cdots \text{答}$$

3 回目にちょうど確定できる確率を求める。1 回目、2 回目ともに 1 または 3 を出し、3 回目に 2 を出す確率は、

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

よって、求める確率は、

$$P_3(3) = P_3(2) + \frac{4}{27} = \frac{19}{27} \quad \cdots \text{答}$$

(2) B が 2 と 3 を共に出せば $K=2$ と確定できる。

1 回の試行で 2 と 3 を共に出すことはできないので、確定しない。

$$P_3(1) = 0 \quad \cdots \text{答}$$

2 回目にちょうど確定できる確率を求める。1 回目、2 回目に 2、3 または 3、2 と出したときだから、

$$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

よって、求める確率は、

$$P_3(2) = P_3(1) + \frac{2}{9} = \frac{2}{9} \quad \cdots \text{答}$$

3 回目にちょうど確定できる確率を求める。

(i) 1 回目、2 回目に 3 が出ず、2 が少なくとも 1 回出て、3 回目に 3 が出る

(ii) 1 回目、2 回目に 2 が出ず、3 が少なくとも 1 回出て、3 回目に 2 が出る

のいずれかであるから、

$$\left\{ \left(\frac{2}{3} \right)^2 - \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right\} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{9}$$

よって、求める確率は、

$$P_3(3) = P_3(2) + \frac{2}{9} = \frac{4}{9} \quad \cdots \text{答}$$

(3)

$K=1$ のとき、 n 回目までに少なくとも 1 回は 2 を出す確率が $P_N(n)$ であるから、

$$\begin{aligned} P_N(n) &= 1 - \text{『} n \text{ 回目までに一度も 2 を出さない確率』} \\ &= 1 - \left(\frac{N-1}{N} \right)^n \end{aligned}$$

$K=N$ のとき、 n 回目までに少なくとも 1 回は N を出す確率が $P_N(n)$ であるから、

$K=1$ の場合と同じく、

$$P_N(n) = 1 - \left(\frac{N-1}{N} \right)^n$$

$2 \leq K \leq N-1$ のとき、 K と $K+1$ を n 回目までに少なくとも 1 回ずつ出す確率が

$P_N(n)$ であるから、 n 回の試行の中で

C : 少なくとも 1 回 K を取り出す事象

D : 少なくとも 1 回 $K+1$ を取り出す事象

とすると、

$$\begin{aligned} P_N(n) &= P(C \cap D) \\ &= 1 - P(\overline{C \cap D}) \\ &= 1 - \{ P(\overline{C}) + P(\overline{D}) - P(\overline{C} \cap \overline{D}) \} \\ &= 1 - \left\{ \left(\frac{N-1}{N} \right)^n + \left(\frac{N-1}{N} \right)^n - \left(\frac{N-2}{N} \right)^n \right\} \\ &= 1 - 2 \left(\frac{N-1}{N} \right)^n + \left(\frac{N-2}{N} \right)^n \end{aligned}$$

以上より、

$$P_N(n) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{N-1}{N} \right)^n & (K=1, N) \\ 1 - 2 \left(\frac{N-1}{N} \right)^n + \left(\frac{N-2}{N} \right)^n & (2 \leq K \leq N-1) \end{cases} \quad \cdots \text{答}$$

$$(4) \quad P_N(cN) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{N-1}{N} \right)^{cN} & (K=1, N) \\ 1 - 2 \left(\frac{N-1}{N} \right)^{cN} + \left(\frac{N-2}{N} \right)^{cN} & (2 \leq K \leq N-1) \end{cases}$$

であり、

$$\left(\frac{N-1}{N} \right)^{cN} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{N-1} \right)^{N-1} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{N}} \right) \right\}^{-c}$$

$$\left(\frac{N-2}{N} \right)^{cN} = \left[\left(1 + \frac{2}{N-2} \right)^{\frac{N-2}{2}} \right]^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{N}} \right)^{-c}$$

$$\text{だから } \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N-1}{N} \right)^{cN} = (e \cdot 1)^{-c} = e^{-c}, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N-2}{N} \right)^{cN} = (e^2 \cdot 1^2)^{-c} = e^{-2c}$$

だから、

$$K=1, N \text{ のとき、} \lim_{N \rightarrow \infty} P_N(cN) = 1 - e^{-c} \quad \cdots \text{答}$$

$$2 \leq K \leq N-1 \text{ のとき、} \lim_{N \rightarrow \infty} P_N(cN) = 1 - 2e^{-c} + e^{-2c} \quad \cdots \text{答}$$

[V]

(1) $AP+BP=4a$ を満たす点 P は、2 定点 A, B を焦点とする楕円である。

それを $\frac{x^2}{s^2} + \frac{y^2}{t^2} = 1, s > t > 0$ とすると、

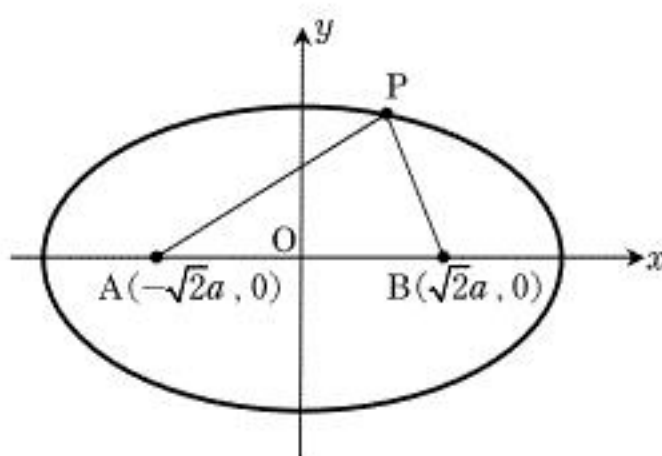
$$s^2 - t^2 = 2a^2, \quad 2s = 4a$$

が成立するので、

$$s = 2a, \quad t = \sqrt{2}a$$

よって、

$$\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{2a^2} = 1 \quad \cdots \text{答} \quad \cdots \textcircled{1}$$

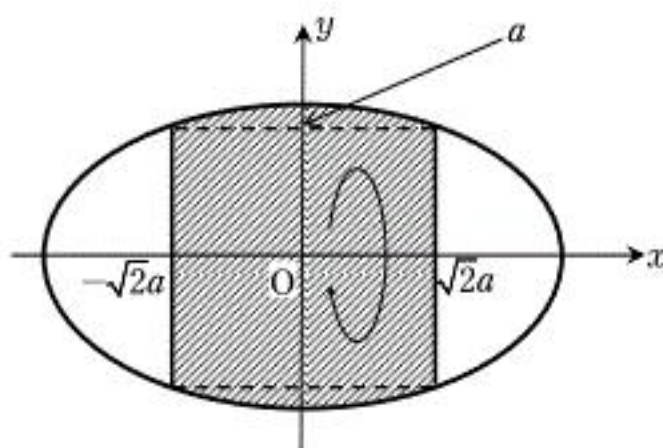


$$(2) \quad V = \pi \int_{-\sqrt{2}a}^{\sqrt{2}a} y^2 dx$$

$$= \pi \int_{-\sqrt{2}a}^{\sqrt{2}a} \left(2a^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx$$

$$= \pi \left[2a^2 x - \frac{x^3}{6} \right]_{-\sqrt{2}a}^{\sqrt{2}a}$$

$$= \frac{10\sqrt{2}}{3} \pi a^3 \quad \cdots \text{答}$$



(3) 求める面積を S とするとき、

$$S = 2\pi \int_{-\sqrt{2}a}^{\sqrt{2}a} f(x) dx + T, \quad f(x) = \sqrt{y^2 + (yy')^2}, \quad T = \pi a^2 \times 2 \text{ (半径 } a \text{ の円板 2 枚の面積)}$$

であり、①より

$$y^2 = 2a^2 - \frac{1}{2}x^2$$

$$2yy' = -x$$

から、

$$f(x) = \sqrt{2a^2 - \frac{1}{2}x^2 + \left(-\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{8a^2 - x^2}$$

よって、

$$2\pi \int_{-\sqrt{2}a}^{\sqrt{2}a} \frac{1}{2}\sqrt{8a^2 - x^2} dx$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}a} \sqrt{(2\sqrt{2}a)^2 - x^2} dx$$

ここで $x = 2\sqrt{2}a \cos \theta$ とおくと $\frac{dx}{d\theta} = -2\sqrt{2}a \sin \theta$

x	$0 \rightarrow \sqrt{2}a$
θ	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{3}$

$$2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{8a^2 - 8a^2 \cos^2 \theta} (-2\sqrt{2}a \sin \theta) d\theta$$

$$= 16\pi a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 \theta d\theta$$

$$= 16\pi a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= 8\pi a^2 \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{2}{3} \pi a^2 (2\pi + 3\sqrt{3})$$

以上より、

$$S = \frac{2}{3} \pi a^2 (2\pi + 3\sqrt{3}) + 2\pi a^2$$

$$= \frac{2}{3} \pi a^2 (2\pi + 3 + 3\sqrt{3}) \quad \cdots \text{答}$$

$$\ast \int_{-\sqrt{2}a}^{\sqrt{2}a} \sqrt{8a^2 - x^2} dx$$

$$= 2 \left\{ \pi (2\sqrt{2}a)^2 \cdot \frac{30}{360} + \frac{1}{2} \sqrt{2}a \cdot \sqrt{6}a \right\}$$

$$= \frac{2}{3} a^2 (2\pi + 3\sqrt{3})$$

と計算してもよい。

