

数 学

問 題

2015年度

〈H27090017〉

注 意 事 項

1. この試験では、この問題冊子のほかに、解答用紙3種類（その1、その2、その3）を配布します。
2. 試験開始の指示があるまで、問題冊子および解答用紙には手を触れないでください。
3. 問題は4～5ページに記載されています。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚損等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせてください。
4. 解答はすべて、HBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルで記入してください。
5. 記述解答用紙記入上の注意
 - (1) 記述解答用紙の所定欄（2カ所）に、氏名および受験番号を正確に丁寧に記入してください。
 - (2) 所定欄以外に受験番号・氏名を書かないでください。
 - (3) 受験番号の記入にあたっては、次の数字見本にしたがい、読みやすいように、正確に丁寧に記入してください。

数 字 見 本	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

- (4) 受験番号は右詰めで記入し、余白が生じる場合でも受験番号の前に「0」を記入しないでください。

万	千	百	十	一
	3	8	2	5

(例) 3825番⇒

6. 解答はすべて所定の解答欄に記入してください。所定欄以外に何かを記入した解答用紙は採点の対象外となる場合があります。
7. 下書きは問題冊子の余白を使用してください。
8. 試験終了の指示が出たら、すぐに解答をやめ、筆記用具を置き解答用紙を裏返しにしてください。
9. 問題冊子は持ち帰ってください。
10. いかなる場合でも、解答用紙は必ず提出してください。

このページは下書きに使用してよい。

このページは下書きに使用してよい。

[I] 関数 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ について、次の問に答えよ。

- (1) $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。
- (2) $t > 0$ を媒介変数として、 $x = f'(t)$, $y = f(t) - tf'(t)$ で表される曲線の概形を描け。
- (3) (2) の曲線の接線が x 軸と y 軸によって切り取られてできる線分の長さは一定であることを示せ。

[II] 整数 x, y が $x^2 - 2y^2 = 1$ をみたすとき、次の問に答えよ。

- (1) 整数 a, b, u, v が $(a + b\sqrt{2})(x + y\sqrt{2}) = u + v\sqrt{2}$ をみたすとき、 u, v を a, b, x, y で表せ。さらに $a^2 - 2b^2 = 1$ のときの $u^2 - 2v^2$ の値を求めよ。ともに答のみでよい。
- (2) $1 < x + y\sqrt{2} \leq 3 + 2\sqrt{2}$ のとき、 $x = 3$, $y = 2$ となることを示せ。
- (3) 自然数 n に対して、 $(3 + 2\sqrt{2})^{n-1} < x + y\sqrt{2} \leq (3 + 2\sqrt{2})^n$ のとき、 $x + y\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n$ を示せ。

[III] a, b を実数とし、

$$f(x) = x^2 + ax + 1, \quad g(x) = -x^2 - bx + 1$$

とおく。次の問に答えよ。

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ が共通の解を持つための a, b の条件を求めよ。
- (2) $a \geq 0$, $b \geq 0$ の範囲で、(1) で求めた条件をみたしながら a, b を動かす。 $f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ の共通解を α とし、 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $(\alpha, 0)$ における接線を ℓ とする。このとき、 $y = g(x)$ のグラフと ℓ で囲まれる部分の面積 S の最小値を求めよ。

[IV] N を 3 以上の自然数とする。1 から N までの数字が書かれた N 枚のカードを用意し、A と B の二人で次のようなゲームを行う。まず A は、1 から N までの数のうちから一つ選びそれを K とし、その数は B に知らせずにおく。その後、以下の試行を何度も繰り返す。

B は N 枚のカードから無作為に一枚引いて A にその数を伝え、A は引かれた数字が K より大きければ「上」、 K 以下であれば「以下」と B に答え、B はその答から K の範囲を絞り込む。引いたカードは元へ戻す。

このとき、 n 回以下の試行で B が K を確定できる確率を $P_N(n)$ で表す。次の間に答えよ。

- (1) $K = 1$ のとき、 $P_3(1)$, $P_3(2)$, $P_3(3)$ を求めよ。
- (2) $K = 2$ のとき、 $P_3(1)$, $P_3(2)$, $P_3(3)$ を求めよ。
- (3) $K = 1, 2, \dots, N$ について $P_N(n)$ を求めよ。
- (4) 自然数 c に対して、極限值 $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(cN)$ を求めよ。

[V] $a > 0$ とする。 xy 平面上に点 $A(-\sqrt{2}a, 0)$, $B(\sqrt{2}a, 0)$ を固定する。動点 $P(x, y)$ は条件 $AP + BP = 4a$ をみたすものとする。次の間に答えよ。

- (1) 点 P の軌跡として得られる曲線の方程式を求めよ。ただし、答のみでよい。
- (2) (1) の曲線の $-\sqrt{2}a \leq x \leq \sqrt{2}a$ の部分と、直線 $x = -\sqrt{2}a$, 直線 $x = \sqrt{2}a$ で囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を考える。この立体の体積 V を求めよ。
- (3) (2) の立体の表面積 S を求めよ。ここで、 $y = f(x)$ のグラフの $p \leq x \leq q$ の部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる曲面の面積は

$$2\pi \int_p^q \sqrt{\{f(x)\}^2 + \{f'(x)\}^2} dx$$

として計算してよい。

[以 下 余 白]

このページは下書きに使用してよい。

このページは下書きに使用してよい。

