問 1

(1)

$$P(X=5)=\frac{1}{6},\quad P(X=5\cap Z=4)=\frac{1}{6}\cdot {}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{5}{32\cdot 6}$$

$$\therefore\ P_{X=5}(Z=4)=\frac{P(X=5\cap Z=4)}{P(X=5)}=\frac{\frac{5}{32\cdot 6}}{\frac{1}{6}}=\underline{\underline{\frac{5}{32}}}\ \text{（答）}$$

(2)

$$P(Z=4)=P(X=4\cap Z=4)+P(X=5\cap Z=4)+P(X=6\cap Z=4)$$

$$=\frac{1}{6}\left\{{}_4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_6C_4\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{29}{64}=\underline{\underline{\frac{29}{384}}}\ \text{（答）}$$

(3)

$$P(Z=5)=\frac{1}{6}\left\{{}_5C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}=\frac{8}{384}$$

$$P(Z=6)=\frac{1}{6}\cdot {}_6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{384}$$

$$\therefore\ P(Z\leqq 3)=1-P(Z\geqq 4)$$

$$=1-\left(\frac{29}{384}+\frac{8}{384}+\frac{1}{384}\right)$$

$$=1-\frac{38}{384}$$

$$=\underline{\underline{\frac{173}{192}}}\ \text{（答）}$$

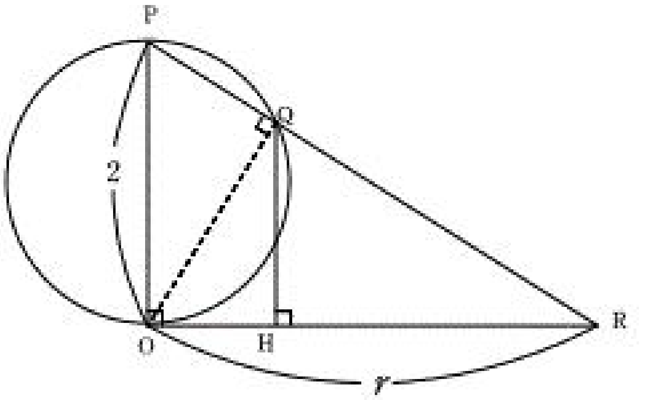
問 2

(1) $\quad \mathrm{PR}=\sqrt{r^2+4}$

$\triangle\mathrm{POR}\backsim\triangle\mathrm{PQO}$ より，

$$\mathrm{PQ}=2\cdot\frac{2}{\sqrt{r^2+4}}=\frac{4}{\sqrt{r^2+4}}$$

$$\therefore\ \mathrm{QR}=\mathrm{PR}-\mathrm{PQ}=\sqrt{r^2+4}-\frac{4}{\sqrt{r^2+4}}=\underline{\frac{r^2}{\sqrt{r^2+4}}}\ \text{(答)}$$



(2) $\mathrm{QH}=h\ (h\geqq 1)$ とすると，

$\triangle\mathrm{QRH}\backsim\triangle\mathrm{PRO}$ より，

$$h:2=\frac{r^2}{\sqrt{r^2+4}}:\sqrt{r^2+4}$$

$$\iff\quad h=\frac{2r^2}{r^2+4}$$

ここで，

$$h\geqq 1\iff\frac{2r^2}{r^2+4}\geqq 1\qquad\therefore\ \underline{\underline{r\geqq 2}}\ \cdots\cdots①$$

①より，

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\geqq 2$$

$$\therefore\ x^2+y^2\geqq 4\ \cdots\cdots②$$

$y=x^2-2$ 上の点 (x,y) において，②をみたす実数 x の範囲を調べる．

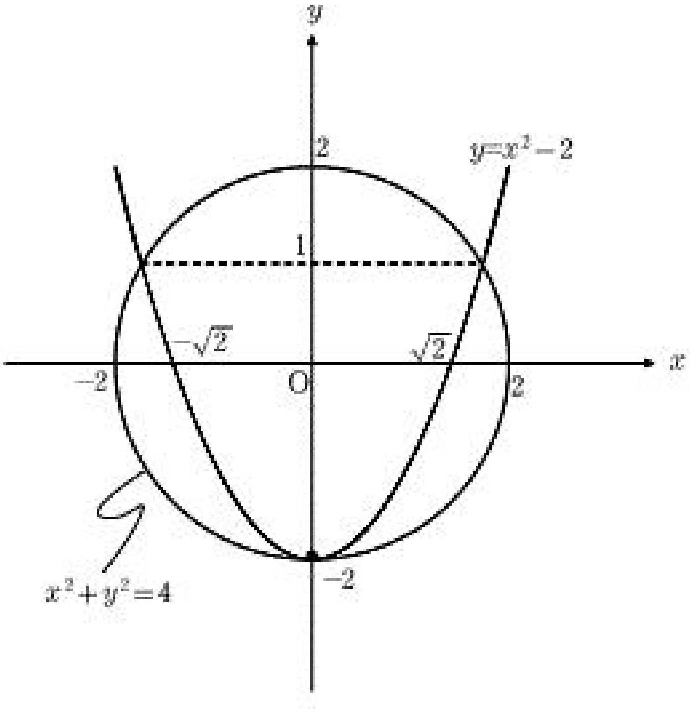
$x^2+y^2=4$ へ $x^2=y+2$ を代入して，

$$y^2+y-2=0$$

$$\iff (y+2)(y-1)=0\quad\therefore\ y=-2,1$$

これより，

$\underline{x\leqq-\sqrt{3},\ x=0,\ \sqrt{3}\leqq x}$ (答)



(3) (2)より，

$$h=\frac{2r^2}{r^2+4}=\frac{2(r^2+4)-8}{r^2+4}=2-\frac{8}{r^2+4}$$

「h が最小のとき」$\iff$「 r^2 (または r) が最小のとき 」③

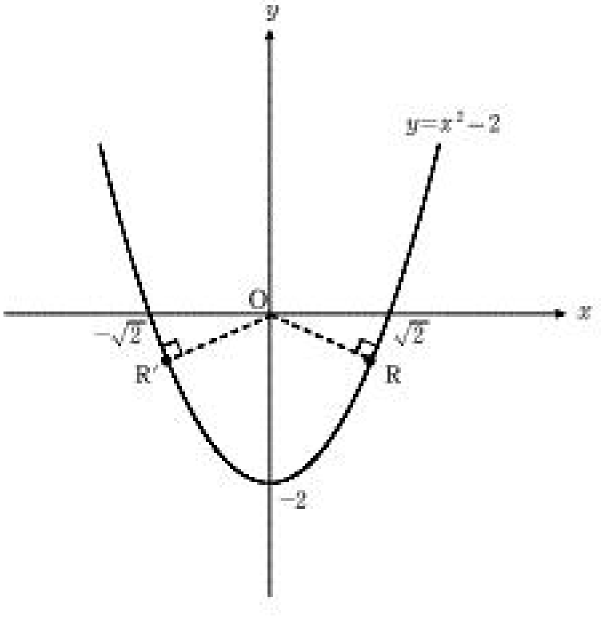
③より， $\mathrm{R}(x,y)$ に対して， $x^2=y+2$ より，

$$r^2=x^2+y^2=y^2+y+2$$

$$=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\geqq\frac{7}{4}$$

$y=-\dfrac{1}{2}\ \left(x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$ のとき， r^2 (または r) は最小になる．

よって， $\underline{\mathrm{R}\left(\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)}$ (答)



問 3

(1)　真数条件, 底の条件より，　$0<x<1,\ 1<x$ ……①

$t=\log_n x$ とおくと，

$$1+\log_{\sqrt{x}}(n^2)=1+\frac{\log_n n^2}{\frac{1}{2}\log_n x}=1+\frac{\overset{(ア)}{\boxed{4}}}{t}$$

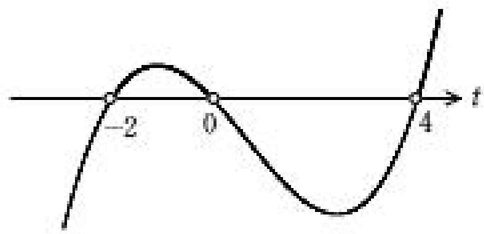
$$\log_n\sqrt{x}=\log_n x^{\frac{1}{2}}=\overset{(イ)}{\boxed{\frac{1}{2}}}\,t$$

したがって，

$$1+\frac{4}{t}<\frac{1}{2}t\quad(t\neq 0)$$

$$\Longleftrightarrow\quad 2t^2+8t<t^3$$

$$\Longleftrightarrow\quad t(t+2)(t-4)>0$$



$$\therefore\ \underline{\overset{(ウ)}{\boxed{-2}}<t<\overset{(エ)}{\boxed{0}}\ \text{または}\ \overset{(オ)}{\boxed{4}}<t}\quad\text{(答)}\cdots\cdots②$$

(2)　(1)と同様に

$$\frac{1}{2}\left(1+\log_{\sqrt{n}}3\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\log_n 3}{\frac{1}{2}\log_n n}\right)=\frac{1}{2}\left(1+2\log_n 3\right)$$

よって，

$$\log_n\sqrt{x}<\frac{1}{2}\left(1+\log_{\sqrt{n}}3\right)$$

$$\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{2}\log_n x<\frac{1}{2}\left(1+2\log_n 3\right)$$

$$\therefore\ x<9n\quad(\because\ n\geqq 2)\cdots\cdots③$$

②, ③より，　$\left\{\underset{(不適)}{\frac{1}{n^2}<x<1}\ \text{または}\ n^4<x\right\}$ かつ　$(x<9n)$ を同時にみたす，

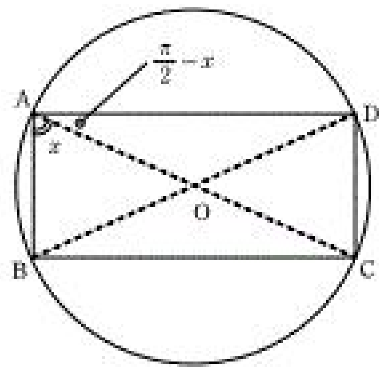
自然数 (n,x) の組を求める．ただし，$n\geqq 2,\ x\geqq 2$

$n^4<x<9n$ より，$n^4<9n$　つまり，$n^3<9$ が必要だから　$\underline{\underline{n=2}}$

逆にこのとき，$2^4<x<18 \Longleftrightarrow 16<x<18$　　$x=17$（存在）

$$\therefore\ \underline{\underline{(n,x)=(2,17)}}\quad\text{(答)}$$

問 4



(1) $\angle \mathrm{AOB}=\pi-2x$ より，

$$\triangle \mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin(\pi-2x)=\frac{1}{2}\sin 2x$$

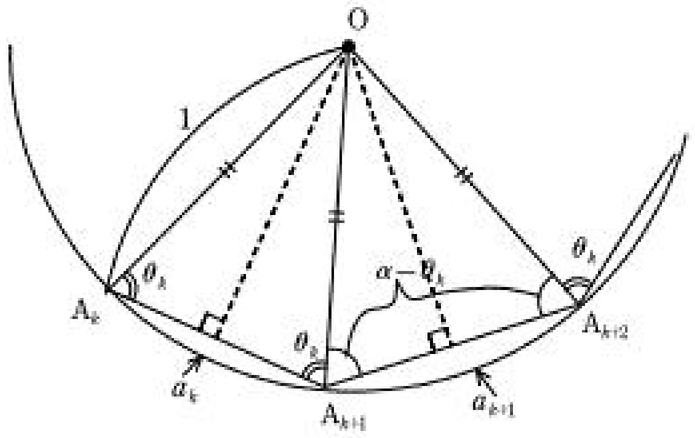
$\angle \mathrm{AOD}=2x$ より，

$$\triangle \mathrm{OAD}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 2x=\frac{1}{2}\sin 2x$$

ゆえに，(長方形 ABCD の面積) $=2\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+2\cdot\frac{1}{2}\sin 2x=\overset{(ア)}{\boxed{2\sin 2x}}$

ここで，$0<x<\frac{\pi}{2}$ より，$0<2x<\pi$

よって，$2x=\frac{\pi}{2}$ $\left(x=\overset{(イ)}{\boxed{\frac{\pi}{4}}}\right)$ のとき，(最大面積) $=\overset{(ウ)}{\boxed{2}}$



(2)

(i) $\underline{a_k=\pi-2\theta_k}$ (答)

$\underline{a_{k+1}=\pi-2\alpha+2\theta_k}$ (答)

ここで，

$\underline{a_k+a_{k+1}=2(\pi-\alpha)}$ (答)

(ii) $n=2l+1$ (l は自然数) とおくと，

$\theta_1=\theta_3=\theta_5=\cdots\cdots=\theta_{2l+1}=\underset{(\theta_2)}{\theta_{2l+3}}=\theta_4=\theta_6=\cdots\cdots=\theta_{2l}$ となる．

つまり，$\triangle \mathrm{OA_1A_2}\sim\triangle \mathrm{OA_{2l+1}A_1}$ まですべて合同な二等辺三角形となる．

よって，$\underline{n\text{ 角形 } \mathrm{A_1A_2A_3}\cdots\cdots \mathrm{A}_n \text{ は正 } n \text{ 角形}}$ (証明終)

(補足) $\angle \mathrm{OA}_k\mathrm{A}_{k+1}=\angle \mathrm{OA}_{k+1}\mathrm{A}_k=\theta_k$ のとき，$\angle \mathrm{OA}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2}=\angle \mathrm{OA}_{k+2}\mathrm{A}_{k+1}=\alpha-\theta_k$ となり，
$\angle \mathrm{OA}_{k+2}\mathrm{A}_{k+3}=\alpha-(\alpha-\theta_k)=\theta_k$ に再びもどる．

(iii) $n=2m$ ($m\geqq 2$，m:自然数)

$\angle \mathrm{OA_1A_2}=\angle \mathrm{OA_2A_1}=\theta_1$ より，

$\angle \mathrm{OA_2A_3}=\angle \mathrm{OA_3A_2}=\alpha-\theta_1$

$\angle \mathrm{OA_3A_4}=\angle \mathrm{OA_4A_3}=\alpha-(\alpha-\theta_1)=\theta_1\ (=\theta_3)$ より，

$\angle \mathrm{OA_4A_5}=\angle \mathrm{OA_5A_4}=\alpha-\theta_1$

…………

以降同様の繰り返しとなり，

$\angle \mathrm{OA}_{2m-1}\mathrm{A}_{2m}=\angle \mathrm{OA}_{2m}\mathrm{A}_{2m-1}=\theta_1\ (=\theta_{2m-1})$ より，

$\angle \mathrm{OA}_{2m}\mathrm{A}_1=\angle \mathrm{OA}_1\mathrm{A}_{2m}=\alpha-\theta_1$

$\angle \mathrm{OA_1A_2}=\angle \mathrm{OA_2A_1}=\alpha-(\alpha-\theta_1)=\theta_1$ にもどる．(周期的巡回群)

これより，

$\theta_1=\theta_3=\theta_5=\cdots\cdots=\theta_{2m-1}$ は示された (証明終)

$\underline{(\theta_1=\theta_3=\theta_5=\cdots\cdots=\theta_{n-1})}$

$$\triangle \mathrm{OA_1A_2}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin(\pi-2\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

$$\triangle \mathrm{OA_2A_3}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin(\pi-2\alpha+2\theta)=\frac{1}{2}\sin(2\alpha-2\theta)$$

$$\therefore\ S_n(\theta)=S_{2m}(\theta)=\frac{m}{2}\sin 2\theta+\frac{m}{2}\sin(2\alpha-2\theta)$$

$$=\underline{\frac{n}{4}\{\sin 2\theta+\sin(2\alpha-2\theta)\}}\quad \text{(答)}$$

(iv) $\alpha=\frac{(n-2)\pi}{n}=\underline{\left(1-\frac{2}{n}\right)\pi}$ (答)

$$S_n(\theta)=\frac{n}{4}\left\{\sin 2\theta-\sin\left(\frac{4}{n}\pi+2\theta\right)\right\}$$

$$=\frac{n}{2}\cos\left(\frac{2}{n}\pi+2\theta\right)\sin\left(-\frac{2}{n}\pi\right)$$

$$=\underset{(-)}{\underline{-\frac{n}{2}\sin\frac{2}{n}\pi}}\cdot\cos\left(\frac{2}{n}\pi+2\theta\right)$$

ここで，

$$\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{4}{n}\right)<\theta<\frac{\pi}{2}\iff \pi\left(1-\frac{4}{n}\right)<2\theta<\pi$$

$$\iff \pi-\frac{2}{n}\pi<2\theta+\frac{2}{n}\pi<\pi+\frac{2}{n}\pi$$

$\frac{2}{n}\pi+2\theta=\pi$ $\underline{\left(\theta=\frac{n-2}{2n}\pi\right)}$ (答) のとき，$\cos\left(\frac{2}{n}\pi+2\theta\right)=-1$ となり，

$(S_n(\theta)$ の最大値$)=\underline{\frac{n}{2}\sin\frac{2}{n}\pi}$ (答)