1

(1) $63a-32b=1 \iff 32(2a-b)-a=1$ より

$2a-b=1,\ a=31$

よって，$b=61$

$63a-32b=1 \iff 63(a-31)=32(b-61)$

$$\begin{cases} a=32k+31 \\ b=63k+61 \end{cases}$$

a が最小の正の整数のとき，$k=0$

$(a,b)=(31,61)$

したがって，

$ab=31\cdot 61=\underline{1891}$ …(答)

(2) 余事象「4 の倍数とならない」

(i) 「2，4，6 の目が出ない」…… $\dfrac{3^3}{6^3}=\dfrac{27}{216}$

(ii)「2 または 6 の目のどちらかが出て，4 の目は出ない」…… $\dfrac{{}_3C_1\cdot 2\cdot 3^2}{6^3}=\dfrac{54}{216}$

よって，積が 4 の倍数となる確率は

$1-\left(\dfrac{27}{216}+\dfrac{54}{216}\right)=\dfrac{135}{216}=\underline{\dfrac{5}{8}}$ …(答)

(3) mod 3 で考える．

$a_n \equiv c_n \pmod 3$ （ただし，$0 \leqq c_n \leqq 2$）

$b_n \equiv d_n \pmod 3$ （ただし，$0 \leqq d_n \leqq 2$）

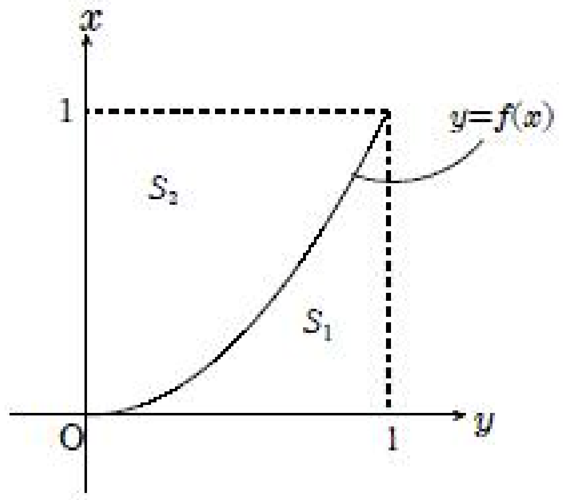
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
c_n	1	1	2	0	2	2	1	0	1	1	2	0	2
d_n	1	2	1	1	0	2	0	0	1	2	1	1	0

周期 8 で，8 個中 3 個で，$d_n=0$

$2016=8\cdot 252$ より，$b_n \equiv 0 \pmod 3$, $d_n=0$ となるものは

$\underline{756個}$ …(答)

(4)



$$S_1=\int_0^1 f(x)dx$$

$$S_2=\int_0^1 g(y)dy$$

$$\begin{cases} 5S_1=2S_2 \\ S_1+S_2=1 \end{cases}$$

ゆえに，

$7S_1=2$

よって，

$$S_1=\int_0^1 f(x)dx=\underline{\frac{2}{7}}$$ …(答)

2

$$w = z - \frac{7}{4z},\ w = x + yi$$

(1)　$z = a + bi$ とする．

$|z| = \frac{7}{2}$ より，$a^2 + b^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$　……①

$$w = z - \frac{7}{4z} = a + bi - \frac{7}{4(a+bi)}$$

$$= a + bi - \frac{7(a-bi)}{4(a+bi)(a-bi)}$$

$$= a + bi - \frac{7(a-bi)}{4(a^2+b^2)}$$

$$= \frac{6}{7}a + \frac{8}{7}bi = x + yi$$　……②

②より，

$$\begin{cases} x = \frac{6}{7}a \\ y = \frac{8}{7}b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{6}x \\ b = \frac{7}{8}y \end{cases}$$

①より，$a^2 + b^2 = \frac{49}{4}$ に代入して

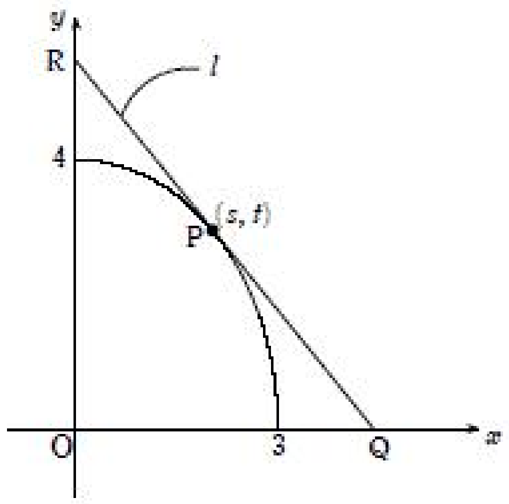
$$\left(\frac{7}{6}x\right)^2 + \left(\frac{7}{8}y\right)^2 = \frac{49}{4}$$

ゆえに，

楕円　$\underline{\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1}$　…(答)

(2)

l ： $\frac{sx}{3^2} + \frac{ty}{4^2} = 1$, $\mathrm{Q}\left(\frac{9}{s}, 0\right)$, $\mathrm{R}\left(0, \frac{16}{t}\right)$



円錐の体積　$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \mathrm{OQ}^2 \cdot \mathrm{OR} = \frac{\pi \cdot 9^2 \cdot 16}{3s^2 t}$　……③

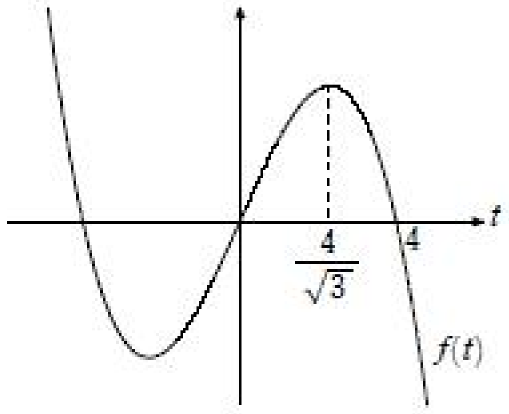
$$\frac{s^2}{3^2} + \frac{t^2}{4^2} = 1 \Longleftrightarrow s^2 = 9 - \frac{9}{16}t^2$$

$$s^2 t = \left(9 - \frac{9}{16}t^2\right)t = -\frac{9}{16}t^3 + 9t = f(t)$$

$$f'(t) = -\frac{27}{16}\left(t^2 - \frac{16}{3}\right)$$

$f'(t) = 0$ となる t は，

$$t = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$$



したがって，

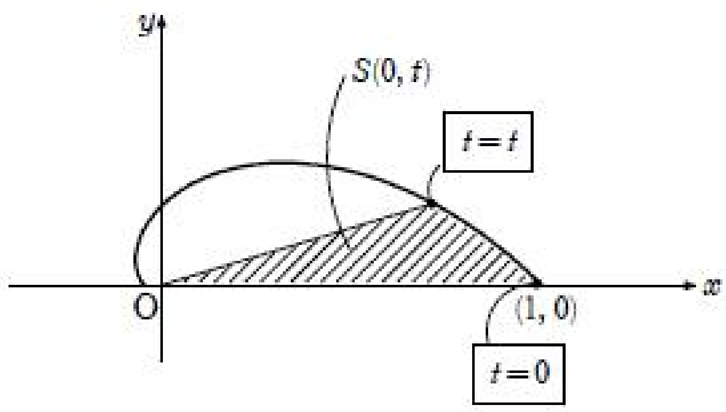
$$\min V = \frac{\pi \cdot 9^2 \cdot 16}{3\max f(t)} = \frac{\pi \cdot 81 \cdot 16}{3f\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)} = \underline{18\sqrt{3}\pi}$$　…(答)

3 $x=e^{-t}\cos t,\ y=e^{-t}\sin t$

$$\frac{dx}{dt}=-\sqrt{2}e^{-t}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right),\ \frac{dy}{dt}=-\sqrt{2}e^{-t}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$$

(1)

t	0	…	$\frac{\pi}{4}$	…	$\frac{\pi}{2}$	…	$\frac{3\pi}{4}$	…	π
$\frac{dx}{dt}$	−	−	−	−	−	−	0	+	+
$\frac{dy}{dt}$	+	+	0	−	−	−	−	−	−
(x,y)	(1,0)	↖	←	↙	$\left(0, e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$	↙	↓	↘	↘



$x^2+y^2=e^{-2t}=r^2$ より,極方程式で表現すると

$$r(\theta)=e^{-\theta}$$

$$S(0,t)=\int_0^t \frac{1}{2}r(\theta)^2\,d\theta$$

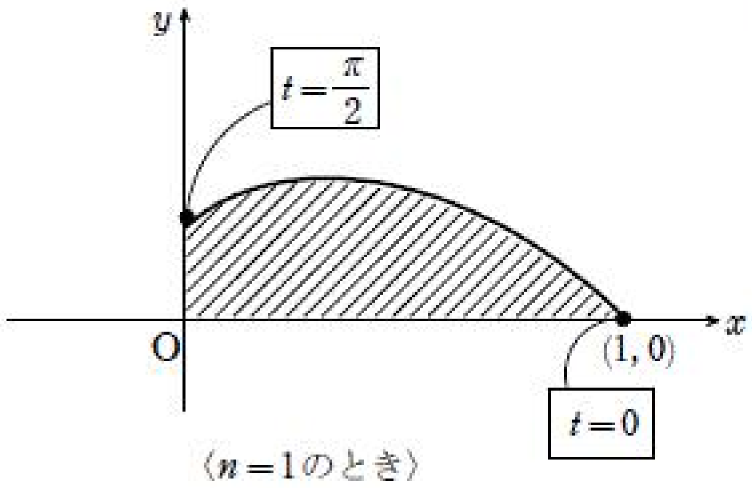
$$=\left[-\frac{1}{4}e^{-2\theta}\right]_0^t$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-e^{-2t}\right)=f(t)$$

したがって,

$$\frac{d}{dt}f(t)=\underline{\frac{1}{2}e^{-2t}}\quad\cdots(答)$$

(2)



〈$n=1$のとき〉

$$U(n)=S\left(\frac{n-1}{2}\pi,\ \frac{n}{2}\pi\right)=\int_{\frac{n-1}{2}\pi}^{\frac{n}{2}\pi}\frac{1}{2}e^{-2\theta}\,d\theta$$

$$=\left[-\frac{1}{4}e^{-2\theta}\right]_{\frac{n-1}{2}\pi}^{\frac{n}{2}\pi}$$

$$=\underline{\frac{1}{4}e^{-n\pi}\left(e^{\pi}-1\right)}\quad\cdots(答)$$

(3)

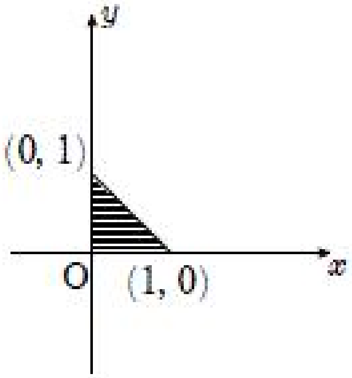
$$\sum_{n=1}^{\infty}U(n)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}U(n)=\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{4}\left(e^{\pi}-1\right)\left(e^{-\pi}+e^{-2\pi}+e^{-3\pi}+\cdots\cdots+e^{-N\pi}\right)\right\}$$

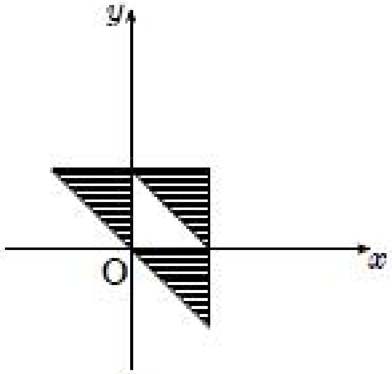
$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{4}\left(e^{\pi}-1\right)\cdot\frac{e^{-\pi}\left(1-e^{-N\pi}\right)}{1-e^{-\pi}}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-e^{-N\pi}\right)$$

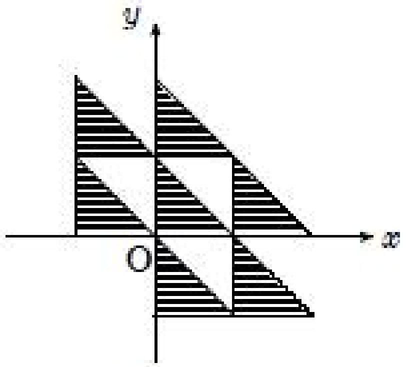
$$=\underline{\frac{1}{4}}\quad\cdots(答)$$

4



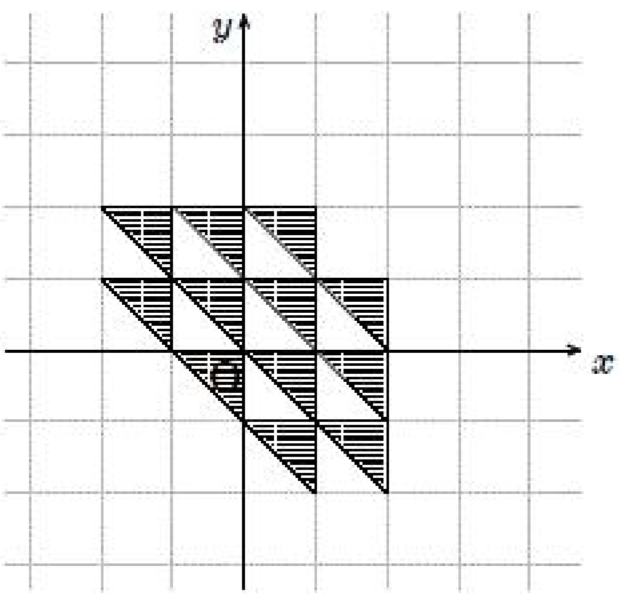


S_1

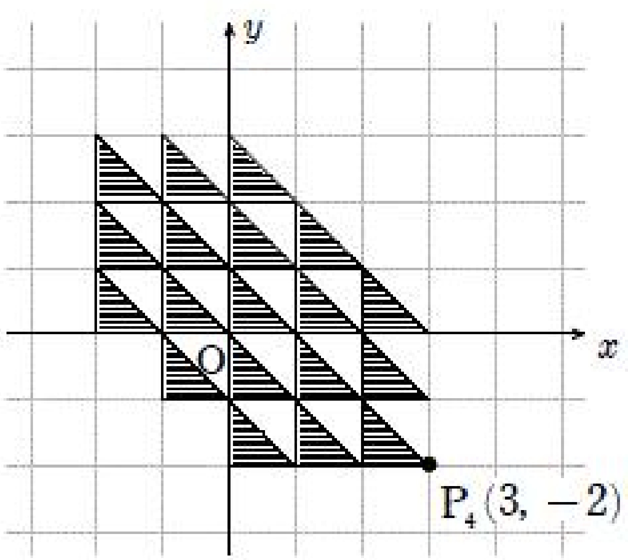


S_2

(1)



(2)　$m=2$ のとき S_4



一番右下の三角形の頂点 P_4 が,原点から最も距離が大きい.

同様に S_{2m} のときを考えると,

$P_{2m}(m+1, -m)$

$$d_{2m}=\sqrt{(m+1)^2+(-m)^2}$$
$$=\underline{\sqrt{2m^2+2m+1}}\quad\cdots(\text{答})$$