［Ｉ］

m,n を正の整数とするとき,

$f(m,n)=(2n-1)2^{m-1}$　…①

であることを示す。

まずは、任意の正の整数 m で、

$f(m,1)=2^{m-1}$, $f(m,2)=3\cdot 2^{m-1}$, $f(m,3)=5\cdot 2^{m-1}$　（３つまとめて②）

であることを示す。

（ｉ）　$m=1$ のとき、

$f(1,1)=2^0=1$

$f(1,2)=\frac{1}{2}f(2,2)=\frac{6}{2}=3$

$f(1,3)=\frac{1}{2}f(2,3)=\frac{1}{2^2}f(3,3)=\frac{20}{4}=5$

より②は成立する。

（ⅱ）　$m=k$（k は正の整数)のとき、

$f(k,1)=2^{k-1}$, $f(k,2)=3\cdot 2^{k-1}$, $f(k,3)=5\cdot 2^{k-1}$

が成立すると仮定する。このとき、条件より、

$f(k+1,1)=2f(k,1)=2\cdot 2^{k-1}=2^k$

$f(k+1,2)=2f(k,2)=2\cdot 3\cdot 2^{k-1}=3\cdot 2^k$

$f(k+1,3)=2f(k,3)=2\cdot 5\cdot 2^{k-1}=5\cdot 2^k$

となり、②は $m=k+1$ でも成立する。

以上より②は任意の正の整数 m で成立する。　…③

次に、①が任意の正の整数 n で成立することを示す。($n=1,2,3$ までは証明済)

m は正の整数、$n=l$（l は正の整数)のとき、

$f(m,l)=(2l-1)2^{m-1}$

$f(m,l+1)=(2l+1)2^{m-1}$

$f(m,l+2)=(2l+3)2^{m-1}$

が成立すると仮定する($l=1$ のときは証明済)。このとき、

$f(m,l+3)+3f(m,l+1)=3f(m,l+2)+f(m,l)$

の成立から、

$f(m,l+3)+3\cdot(2l+1)2^{m-1}=3\cdot(2l+3)2^{m-1}+(2l-1)2^{m-1}$

が成立し、整理すると、

$f(m,l+3)=(2l+5)2^{m-1}$

が成立する。よって①は任意の正の整数 n で成立する。

以上より①は任意の正の整数 m,n に対して成立する。

※ $f(m,n)-2f(m,n-1)+f(m,n-2)=f(m,n-1)-2f(m,n-2)+f(m,n-3)$

から $f(m,n)-f(m,n-1)=f(m,n-1)-f(m,n-2)$, $f(m,n)=f(m,n-1)+2^m$

が導け、和を取ることでも結果を得られる。

（1）

$f(m,1)=(2\cdot 1-1)2^{m-1}=2^{m-1}$　…答

$f(1,n)=(2n-1)2^{1-1}=2n-1$　…答

（2）

$f(6,32)=(2\cdot 32-1)2^{6-1}$

$=2016$　…答

（3）　任意の正の整数 l は、a を０以上の整数, b を正の奇数として、

$l=2^a b$

の形で表せる。

$a=m-1$,　$2n-1=b$

を満たす正の整数 m,n は存在するから、任意の正の整数 l に対して、

$f(m,n)=l$

を満たす正の整数 m,n は存在する。　…証明終わり

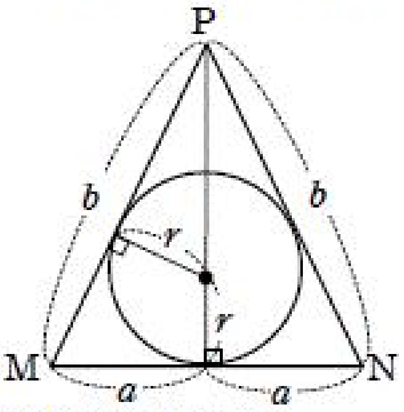
［Ⅱ］

（1） 辺 CD の中点を N とするとき、立体を三角形 PMN を含む平面で切った時にできる切り口を考える。右下図のようになり、求める内接球の半径を r とすると、それは図の二等辺三角形 PMN の内接円の半径に等しい。三角形 PMN の面積の関係より、

$$\frac{r}{2}(b+2a+b)=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot\sqrt{b^2-a^2}$$

が成立し、整理すると、

$$r=\frac{a\sqrt{b^2-a^2}}{a+b} \quad \cdots答$$



（2） 内接する球の表面積を S_1，正四角錐 PABCD の表面積を S_2 とすると、

$$S_1=4\pi r^2=4\pi\left(\frac{a\sqrt{b^2-a^2}}{a+b}\right)^2=\frac{4\pi a^2(b^2-a^2)}{(a+b)^2}=\frac{4\pi a^2(b-a)}{a+b}$$

$S_2=4\times$(△PAB の面積)＋（正方形 ABCD の面積）

$$=4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot b+(2a)^2$$

$$=4a(a+b)$$

よって、

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{4\pi a^2(b-a)}{a+b}}{4a(a+b)}=\frac{\pi a(b-a)}{(a+b)^2}=\pi\frac{\frac{b}{a}-1}{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2}$$

ここで $\dfrac{b}{a}=x$ とすると、

$$\frac{S_1}{S_2}=\pi\frac{x-1}{(1+x)^2}$$

x	(1)	…	3	…
f'		+	0	−
f		↗		↘

さて、$f(x)=\dfrac{x-1}{(1+x)^2}$ とすると $f'(x)=\dfrac{3-x}{(1+x)^3}$

よって $f(x)$ の増減は右上のようになり、$x=3$ のとき $f(x)$ は極大かつ最大となる。

このとき $\dfrac{S_1}{S_2}$ は最大となり、最大値は、

$$\pi f(3)=\frac{\pi}{8} \quad \cdots答$$

（3） $\dfrac{b}{a}=3$ のとき、$b=3a$

さて、正四角錐 PABCD の体積を V とすると、

$$V=\frac{1}{3}\cdot 4a^2\cdot\sqrt{b^2-a^2}$$

$$=\frac{4}{3}a^2\sqrt{9a^2-a^2}$$

$$=\frac{8\sqrt{2}}{3}a^3 \quad \cdots答$$

［Ⅳ］

（1）　$f(x)=x^3-x$ について、

$$f'(x)=3x^2-1$$

よって $y=f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は、

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$
$$=(3t^2-1)(x-t)+t^3-t$$
$$=(3t^2-1)x-2t^3 \quad \cdots①$$

と表せる。①が点 (p,q) を通るための条件は、

$$q=(3t^2-1)p-2t^3 \quad \cdots②$$

また①の傾きが m であるとき、

$$3t^2-1=m \quad \cdots③$$

である。②、③を満たす実数 t の存在条件が求めるものである。

$m \geqq -1$ のとき③を満たす実数 t が存在し、

$$t=\pm\sqrt{\frac{m+1}{3}}$$

このとき②から t を消去すると、

$$q=mp\pm2\left(\frac{m+1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \cdots 答$$

（2）　②を満たす実数 t が、異なる 3 つ存在すればよい。②より、

$$2t^3-3pt^2+p+q=0 \quad \cdots④$$

④の左辺を $g(t)$ とおくとき、

$$g'(t)=6t(t-p)$$

よって④が異なる 3 つの実数解を持つための条件を考えると、

$p \neq 0$ かつ $g(0)g(p)<0$

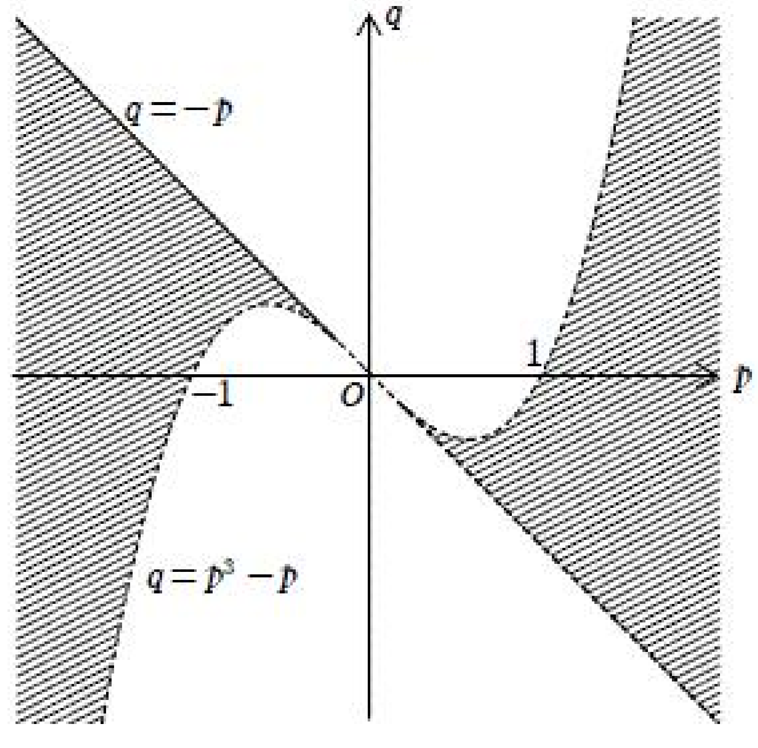
$\Leftrightarrow \quad (q+p)(q-p^3+p)<0 \quad \cdots 答$

（3）　関数 $f(x)$ の増減は次の通り。

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↗

よって、（2）の条件を満たす点 (p,q) の範囲は

右図の斜線部分(境界はすべて含まない)



［V］

（1）　AP＝2 より、

$\mathrm{AP}^2=4$

から、

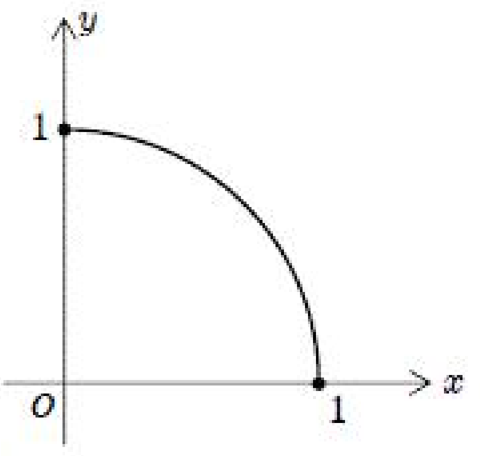
$a^2+b^2+\left(0-\sqrt{3}\right)^2=4$

つまり、

$a^2+b^2=1$

これと $a\geqq 0$，$b\geqq 0$ とで点 P の軌跡は

xy 平面上の円 $x^2+y^2=1$ の $x\geqq 0$，$y\geqq 0$ の部分となる。　…答



（2）　$\mathrm{P}(\cos\theta,\sin\theta,0)$，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とおける。

点 $\mathrm{Q}(x,y,z)$ が線分 AP 上にあるとき、

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$0\leqq k\leqq 1$　…①

と表せ、

$\left(x,y,z-\sqrt{3}\right)=k\left(\cos\theta,\sin\theta,-\sqrt{3}\right)$

より、

$x=k\cos\theta$，$y=k\sin\theta$，$z=\sqrt{3}(1-k)$

1 つ目、2 つ目の式より、

$x^2+y^2=k^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=k^2$　…②

3 つ目の式より、

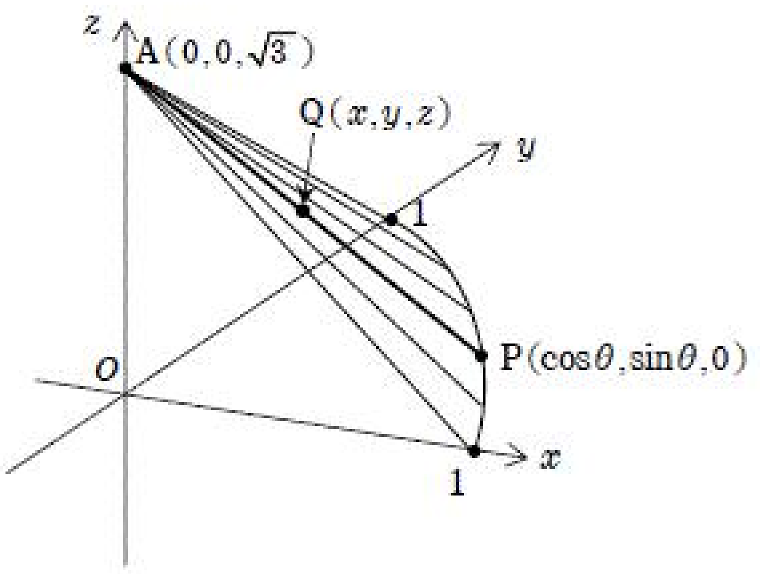
$k=1-\dfrac{z}{\sqrt{3}}$　…③

①，②へ③を代入して k を消去すると、

$0\leqq 1-\dfrac{z}{\sqrt{3}}\leqq 1$，$x^2+y^2=\left(1-\dfrac{z}{\sqrt{3}}\right)^2$　…④

つまり、

$z=\sqrt{3}-\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$，$0\leqq x^2+y^2\leqq 1$　…答



（3）　④で $x=t$ $(0\leqq t\leqq 1)$ とすると、

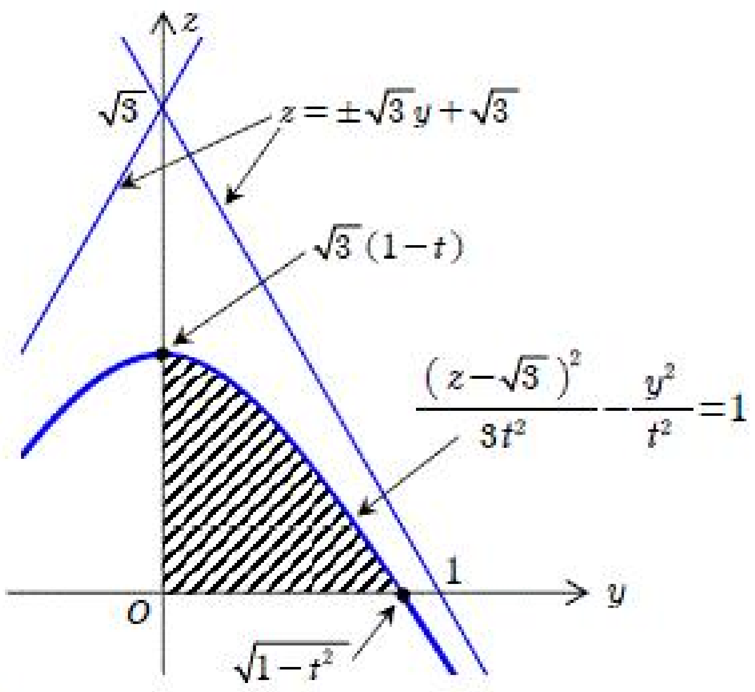
$0\leqq z\leqq\sqrt{3}$，$t^2+y^2=\left(1-\dfrac{z}{\sqrt{3}}\right)^2$

よって、$0<t\leqq 1$ では、

$\dfrac{\left(z-\sqrt{3}\right)^2}{3t^2}-\dfrac{y^2}{t^2}=1$，$0\leqq z\leqq\sqrt{3}$

右図が切り口を yz 平面へ正射影したものである。

ここで、図の斜線領域内における、原点との距離の 2 乗 y^2+z^2 の最大値を求める。



$t^2+y^2=1-\dfrac{2}{\sqrt{3}}z+\dfrac{z^2}{3}$

$\Longleftrightarrow y^2+z^2=\dfrac{4}{3}z^2-\dfrac{2}{\sqrt{3}}z+1-t^2=\dfrac{4}{3}\left(z-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2-t^2+\dfrac{3}{4}$

であり、図より

$0\leqq z\leqq\sqrt{3}(1-t)$

であるから、

[1]　$0\leqq\sqrt{3}(1-t)\leqq 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}$、すなわち $\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$ のとき、

y^2+z^2 は $z=0$ で最大値 $1-t^2$ をとる。

[2]　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sqrt{3}(1-t)\leqq 1$、すなわち $0\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき、

y^2+z^2 は $z=\sqrt{3}(1-t)$ で最大値 $\dfrac{4}{3}\cdot 3(1-t)^2-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}(1-t)+(1-t)(1+t)=3(1-t)^2$

をとる。

以上[1]、[2]より、$x=t$ における切り口の面積 $S(t)$ は、

$0\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき、$S(t)=\pi\left\{\sqrt{3}(1-t)\right\}^2=3\pi(1-t)^2$

$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$ のとき、$S(t)=\pi\left\{\sqrt{1-t^2}\right\}^2=\pi(1-t^2)$

である。　…答

（4）　$V=\displaystyle\int_0^1 S(t)\,dt$

$=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}3\pi(1-t)^2\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\pi(1-t^2)\,dt$

$=\pi\Big[(t-1)^3\Big]_0^{\frac{1}{2}}+\pi\left[t-\dfrac{1}{3}t^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$

$=\dfrac{13}{12}\pi$　…答