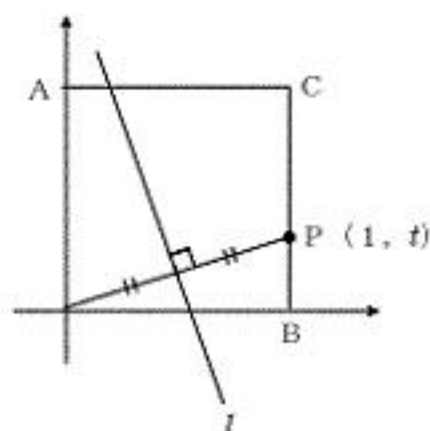


1]

(1)



$$l: y - \frac{t}{2} = -\frac{1}{t} \left(x - \frac{1}{2} \right) \quad \cdots \textcircled{1}$$

(x, y) を通るとき, $\cdots \textcircled{1}$ に代入して,

$$f(t) = t^2 - 2yt - 2x + 1 = 0$$

これが $0 \leq t \leq 1$ に少なくとも 1 つ実数解をもつ,

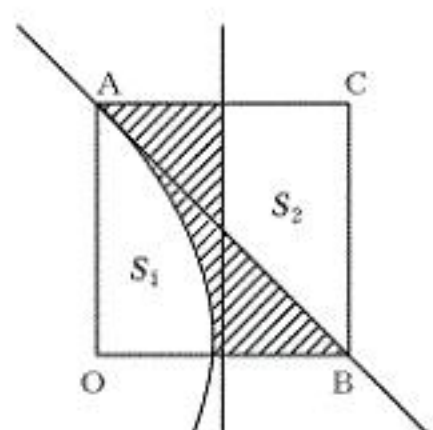
$$f(0) \cdot f(1) \leq 0 \vee \begin{cases} y^2 + 2x - 1 \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ f(0) \geq 0 \wedge f(1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\iff (-2x+1)(-x-y+1) \leq 0 \vee \begin{cases} y^2 + 2x - 1 \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ f(0) \leq \frac{1}{2} \wedge y \leq -x+1 \end{cases}$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (2-0)^3 = \frac{1}{3}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{3}{8}$$

$$\therefore S = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{8} \right) = \frac{7}{24}$$



(2)

(i) $1 \sim n$ が $\boxed{1 \mid 2 \mid \cdots \mid n}$ と並ぶとき $\cdots 1$ 通り

$n+1$ を追加できるのは上の $\wedge$ 部分 $\cdots n$ 通り

$\rightarrow n$ 通り

(ii) $1 \sim n$ が $\boxed{a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_k \mid a_{k+1} \mid \cdots \mid a_n}$ と並ぶとき P_n 通り

$n+1$ を追加できるのは上の $\wedge$ 部分 $\cdots 2$ 通り $\rightarrow 2P_n$ 通り

$$\therefore \underline{\underline{P_{n+1} = 2P_n + n}}$$

(3)

$$\theta = \frac{\pi}{7} \text{ とすると, } \sin 3\theta = \sin 4\theta \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\iff -4\sin^3 \theta + 3\sin \theta = 2\sin 2\theta \cos 2\theta \\ &= 4\sin \theta \cos \theta (2\cos^2 \theta - 1) \end{aligned}$$

$\sin \theta \neq 0$ で両辺割って,

$$\begin{aligned} -4\sin^2 \theta + 3 &= 4\cos \theta (2\cos^2 \theta - 1) \\ \iff -4(1 - \cos^2 \theta) + 3 &= 8\cos^3 \theta - 4\cos \theta \\ \iff 8\cos^3 \theta - 4\cos^2 \theta - 4\cos \theta + 1 &= 0 \end{aligned}$$

よって, $\cos \frac{\pi}{7}$ は, $8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$ の解

また $f(0) = 1$ より, $f(x)$ の定数項は 1 である。

$$\therefore \underline{\underline{f(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1}}$$

よって, $\cos \frac{\pi}{7}$ は, $8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$ の解

また $f(0) = 1$ より, $f(x)$ の定数項は 1 である。

$$\therefore \underline{\underline{f(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1}}$$

(4)

$$-1 < c < 1, \quad f(x) + f(cx) = x^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x=0 \text{ を代入すると, } 2f(0) = 0 \quad \therefore f(0) = 0$$

$$(i) \quad \boxed{c=0} \quad f(x) + f(0) = x^2 \quad \therefore f(x) = x^2$$

(ii) $\boxed{0 < c < 1}$ $\textcircled{1}$ において, $x \rightarrow cx, c^2x, c^3x, \dots$
 $\boxed{-1 < c < 0}$ を代入して, 右のように考える。

$$\left. \begin{aligned} f(x) - f(cx) &= x^2 \\ f(cx) - f(c^2x) &= c^2x^2 \\ f(c^2x) - f(c^3x) &= c^4x^2 \\ &\vdots \\ f(c^{n-1}x) - f(c^nx) &= c^{2(n-1)}x^2 \end{aligned} \right\} \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ の辺々を $+-$ 交互に加えていくと

$$\begin{aligned} &(f(x) + f(cx)) - (f(cx) + f(c^2x)) + (f(c^2x) + f(c^3x)) - \cdots + (-1)^{n-1} (f(c^{n-1}x) + f(c^nx)) \\ &= \left\{ 1 - c^2 + c^4 - \cdots + (-c^2)^{n-1} \right\} x^2 \end{aligned}$$

$$\iff f(x) + (-1)^{n-1} f(c^nx) = \frac{1 - (-c^2)^n}{1 - (-c^2)} x^2 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$f(x)$ は連続, $f(0) = 0$ より $\textcircled{3}$ の両辺に対して $n \rightarrow \infty$ とすると

$$f(x) = \frac{1}{1+c^2} x^2$$

(i), (ii) より,

$$\therefore \underline{\underline{f(x) = \frac{1}{1+c^2} x^2}}$$

$$\alpha = r_1(\cos \theta + i \sin \theta), \beta = r_2(\cos \theta + i \sin \theta), z = R(\cos \lambda + i \sin \lambda) \\ (0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \lambda < 2\pi, R > 0)$$

とする. $\frac{\alpha}{\beta} \neq 0$ である.

$$(i) \quad \boxed{\frac{\alpha}{\beta} > 0} \quad r_1, r_2 > 0$$

$$\alpha + \beta = (r_1 + r_2)(\cos \theta + i \sin \theta) = z$$

$$\alpha\beta = r_1 r_2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = i\bar{z} = (r_1 + r_2)(\sin \theta + i \cos \theta)$$

$$\begin{cases} \cos 2\theta = \sin \theta \\ \sin 2\theta = \cos \theta \end{cases} \text{より,}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi \quad \cdots \cdots ①$$

$$R = r_1 + r_2 = r_1 r_2 \text{ より,}$$

$t^2 - Rt + R = 0$ が正の 2 実数解(重解含む)をもつ条件

$$R \geq 4 \quad \cdots \cdots ②$$

$$(ii) \quad \boxed{\frac{\alpha}{\beta} < 0} \quad r_1 \cdot r_2 < 0, \quad r_1 + r_2 > 0$$

$$\alpha + \beta = (r_1 + r_2)(\cos \theta + i \sin \theta) = z$$

$$\alpha\beta = r_1 r_2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = i\bar{z}$$

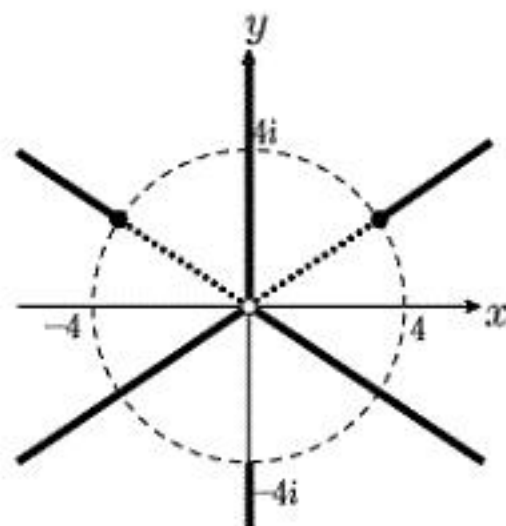
$$z = (r_1 + r_2)(\cos \theta + i \sin \theta) = -r_1 r_2 (-\sin 2\theta - i \cos 2\theta)$$

$$\begin{cases} -\sin 2\theta = \cos \theta \\ -\cos 2\theta = \sin \theta \end{cases} \text{より,}$$

$$\theta = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi, \frac{\pi}{2} \quad \cdots \cdots ③$$

$$R = r_1 + r_2 = -r_1 r_2 \text{ より,}$$

$$t^2 - Rt - R = 0 \text{ が正負の実数解をもつ条件 } R > 0 \quad \cdots \cdots ④$$



①, ②, ③, ④より z を図示すると右図のようになる。

(1)

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$$

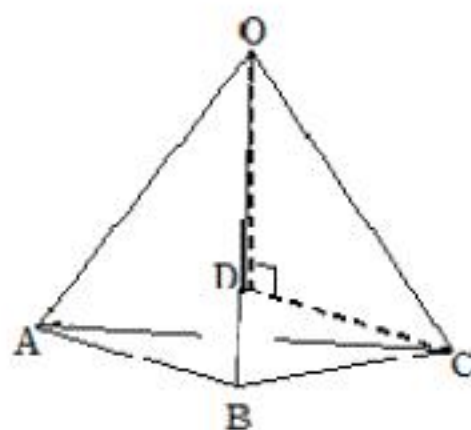
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{OD} = k\vec{a} + \ell\vec{b} \quad (k, \ell: \text{実数})$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{CD} \perp \vec{a} \\ \overrightarrow{CD} \perp \vec{b} \end{cases} \iff \begin{cases} (k\vec{a} + \ell\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{a} = 0 \\ (k\vec{a} + \ell\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2k + \sqrt{3}\ell - 1 = 0 \\ \sqrt{3}k + 2\ell - \sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

$$\therefore k = 2 - \sqrt{6}, \ell = 2\sqrt{2} - 3$$

$$\therefore \underline{\underline{\overrightarrow{OD} = (2 - \sqrt{6})\overrightarrow{OA} + (2\sqrt{2} - \sqrt{3})\overrightarrow{OB}}}}$$



(2)

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OD}|^2 &= |(2 - \sqrt{6})\vec{a} + (2\sqrt{2} - \sqrt{3})\vec{b}|^2 \\ &= (2 - \sqrt{6})^2 |\vec{a}|^2 + 2(2 - \sqrt{6})(2\sqrt{2} - \sqrt{3})\vec{a} \cdot \vec{b} + (2\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 |\vec{b}|^2 = 3 - \sqrt{6} \\ CD &= \sqrt{OC^2 - OD^2} = \sqrt{1 - (3 - \sqrt{6})} = \sqrt{\sqrt{6} - 2} \end{aligned}$$

また,

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}$$

以上より, 四面体 OABC の体積を V とすると,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\sqrt{6} - 2} = \underline{\underline{\frac{1}{12} \sqrt{\sqrt{6} - 2}}}}$$

(1)

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 8n-8 & (n \geq 2) \end{cases}$$

(2) m は自然数とする.

$$\boxed{n=3m}$$

$$\begin{aligned} b_n &= a_2 + a_3 + a_5 + a_6 + \cdots + a_{3m-1} + a_{3m} \\ &= \sum_{k=1}^{3m} a_k - \sum_{k=0}^{m-1} a_{3k+1} = 24m^2 = \frac{8}{3}n^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{n=3m+1}$$

$$\begin{aligned} b_n &= a_1 + a_3 + a_4 + a_6 + a_7 + \cdots + a_{3m-2} + a_{3m} + a_{3m+1} \\ &= \sum_{k=1}^{3m+1} a_k - \sum_{k=0}^{m-1} a_{3k+2} = 24m^2 + 16m + 1 = \frac{8}{3}n^2 - \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{n=3m+2}$$

$$\begin{aligned} b_n &= a_1 + a_2 + a_4 + a_5 + \cdots + a_{3m+1} + a_{3m+2} \\ &= \sum_{k=1}^{3m+2} a_k - \sum_{k=1}^m a_{3k} = 24m^2 + 32m + 9 = \frac{8}{3}n^2 - \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore b_n = \begin{cases} \frac{8}{3}n^2 & (n=3m) \\ \frac{8}{3}n^2 - \frac{5}{3} & \begin{pmatrix} n=3m+1 \\ 3m+2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

これは、 $n=1, 2$ のときでも成立するので全ての自然数 n について成立する.

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^2} = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}$$