

1

(1)

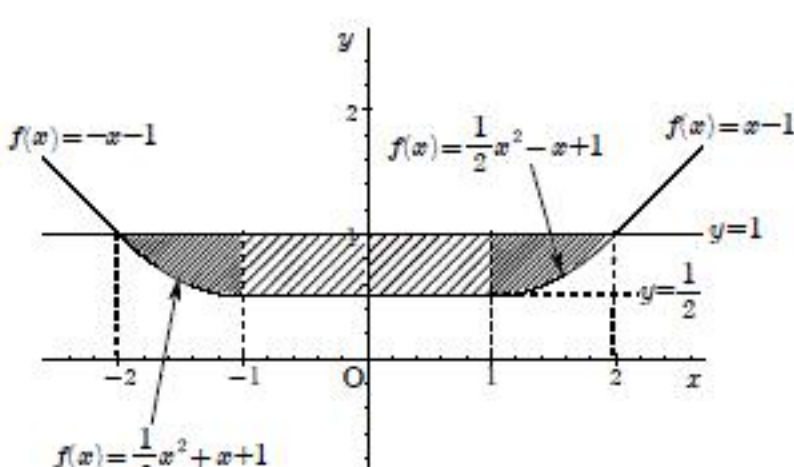
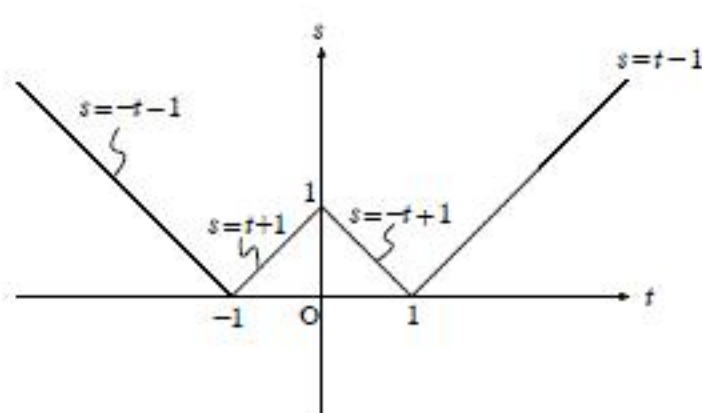
グラフと $t=x-1, x+1$ で囲まれる部分の面積を考える.

- (i) $x < -2$ $f(x) = -x-1$
 (ii) $-2 \leq x < -1$ $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$
 (iii) $-1 \leq x < 1$ $f(x) = \frac{1}{2}$
 (iv) $1 \leq x < 2$ $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$
 (v) $2 \leq x$ $f(x) = x-1$

(i)~(v)より,

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot 2^3 + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{5}{3}$$

$s = ||t| - 1|$ のグラフ



(2) $x=1, 3$ を実数解とするので,

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 3 &= (x-1)(x-3)(x^2 + dx + 1) \\ &= x^4 + (d-4)x^3 + (4-4d)x^2 + (3d-4)x + 3 \\ \therefore \begin{cases} a = d-4 \\ b = 4-4d \\ c = 3d-4 \end{cases} \therefore a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ より, } d \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ここで, $f(x) = x^2 + dx + 1$ とすると,

(i) $f(x) = 0$ が実数解をもつとき, その実数解は, 1 or 3

$$\cdot f(1) = 2 + d = 0 \quad \therefore d = -2$$

このとき $x=1$ は重解で, $a = -6$ ①

$$\cdot f(3) = 10 + 3d = 0 \quad d \text{ は整数にならない.}$$

(ii) $f(x) = 0$ が実数解をもたないとき,

$$\text{判別式 } D = d^2 - 4 < 0 \iff -2 < d < 2 \quad \therefore -6 < a < -2 \text{②}$$

①, ②より,

整数 a の最大値は -3

最小値は -6

(3) 右図のように座標軸を設定する.

$$l_{AC} = 3x + 4y - 12 = 0$$

ここで, $d_3 = a$ と固定すると, 点 O は l' 上の点.

この条件の下 $d_1^2 + d_2^2$ を考える.

円: $x^2 + y^2 = k$ (k : 定数) が l' に接するとき,

$d_1^2 + d_2^2$ は最小.

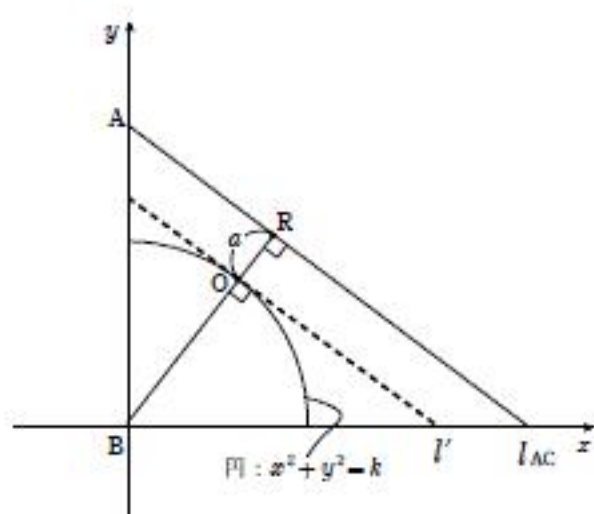
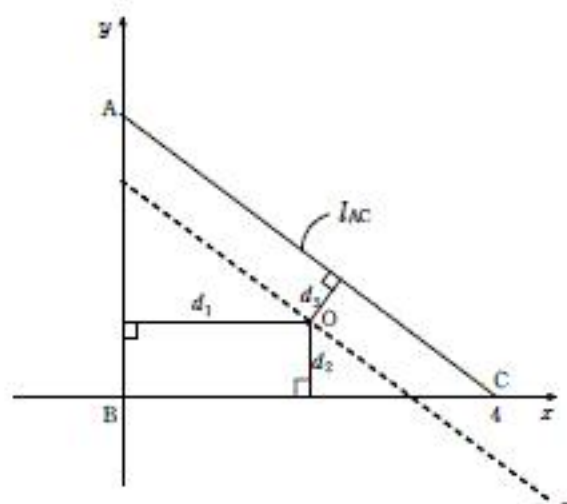
$$BR = 4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{5} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 &= BO^2 + a^2 = \left(\frac{12}{5} - a\right)^2 + a^2 \\ &= 2a^2 - \frac{24}{5}a + \frac{144}{25} \\ &= 2\left(a - \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{72}{25} \geq \frac{72}{25} \end{aligned}$$

等号は $a = \frac{6}{5}$ のとき成立.

よって, $OP^2 + OQ^2 + OR^2$ が最小となるとき,

$$OR = a = \frac{6}{5}$$



(4) $C_1: y = 10^{-k} \cdot 2^x, C_2: y = 10^{100} \cdot 3^{-x}$ のグラフを考える.

$$\begin{aligned} 10^{-k} 2^p &= 10^{100} \cdot 3^{-p} \iff 6^p = 10^{100+k} \\ &\iff p \log_{10} 6 = 100 + k \\ &\iff p = \frac{100+k}{\log_{10} 6} \end{aligned}$$

$$m < \frac{100+k}{\log_{10} 6} < m+1 \quad (m \in \mathbb{Z}) \text{ のとき,}$$

$$1 \leq 10^{100} \cdot 3^{-m}, 1 \leq 10^{-k} \cdot 2^{m+1} \text{ を満たせばよい.}$$

m について整理すると,

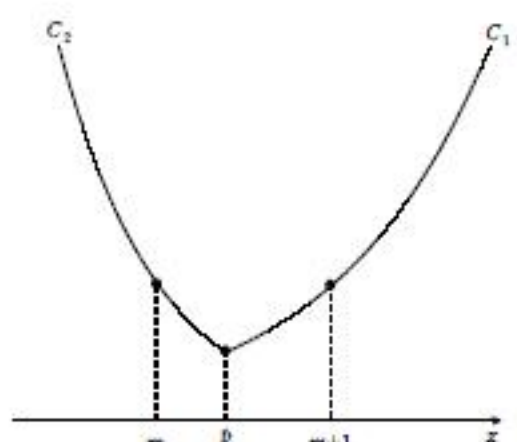
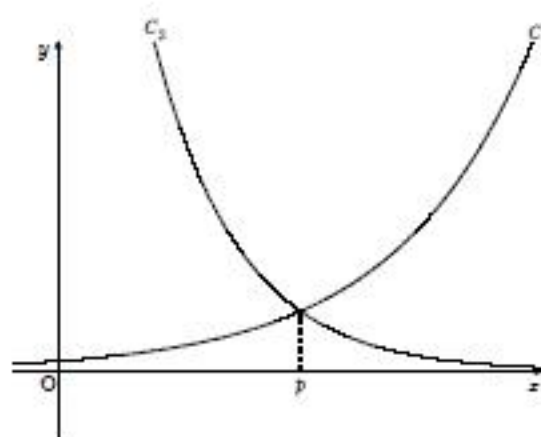
$$\begin{aligned} \left\lceil \frac{100+k}{\log_{10} 6} - 1 \right\rceil < m < \left\lfloor \frac{100+k}{\log_{10} 6} \right\rfloor &\implies \frac{k}{\log_{10} 2} - 1 \leq m \leq \frac{100}{\log_{10} 3} \\ \iff \frac{k}{\log_{10} 2} &\leq \frac{100+k}{\log_{10} 6} \leq \frac{100}{\log_{10} 3} \\ \iff k &\leq \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} \cdot 100 \text{①} \end{aligned}$$

$0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011, 0.4771 < \log_{10} 3 < 0.4772$ より,

$$0.6307 \dots < \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} < 0.6311 \dots \text{ であるから,}$$

①より,

k の最大値は 63



(1)

$$[\sqrt[3]{n}] = 2 \iff 2 \leq \sqrt[3]{n} < 3$$

$$\therefore 8 \leq n < 27 \quad \therefore \underline{\underline{n = 8, 12, 16, 20, 24}}$$

(2) $1 \leq n \leq 10^6, p_n = a \ (\in \mathbb{N})$ とする.

$$ka^2 = n \quad \dots\dots ①$$

$$a = [\sqrt[3]{n}] \iff a = [\sqrt[3]{ka^2}]$$

$$\iff a \leq \sqrt[3]{ka^2} < a+1$$

$$\iff a^3 \leq ka^2 < a^3 + 3a^2 + 3a + 1$$

$$\therefore a \leq k < a+3 + \frac{3a+1}{a^2} \quad \dots\dots ②$$

①②より, $a^3 \leq n \leq 10^6$ より, $1 \leq a \leq 100 \quad \dots\dots ③$

$$\cdot \boxed{a=1} \quad 1 \leq k < 4 + \frac{4}{1} = 8 \quad \dots\dots 7 \text{ 個}$$

$$\cdot \boxed{a=2} \quad 2 \leq k < 5 + \frac{7}{4} \quad \dots\dots 5 \text{ 個}$$

$$\cdot \boxed{a=3} \quad 3 \leq k < 6 + \frac{10}{9} \quad \dots\dots 5 \text{ 個}$$

$$\cdot \boxed{4 \leq a \leq 99} \quad 0 < \frac{3a+1}{a^2} < 1 \text{ より, それぞれ } k \text{ は } 4 \text{ 個}$$

$$\cdot \boxed{a=100} \quad (100)^3 \leq n \leq 10^6 \text{ より, } k \text{ は } 1 \text{ 個}$$

よって, k の個数は,

$$7+5+5+4 \cdot 96+1 = \underline{\underline{402}} \text{ 個}$$

(3)

$$\cdot \boxed{a=1 \text{ のとき}} \quad n=1, 2, 3, \dots, 7 \quad \sum_{n=1}^7 q_n = 1+0+1+0+\dots+1=4 \quad \dots\dots ①$$

$$\cdot \boxed{a=2 \text{ のとき}} \quad n=8, 12, 16, 20, 24 \quad \sum_{n=8}^{26} q_n = 2+0+4+2+0=8 \quad \dots\dots ②$$

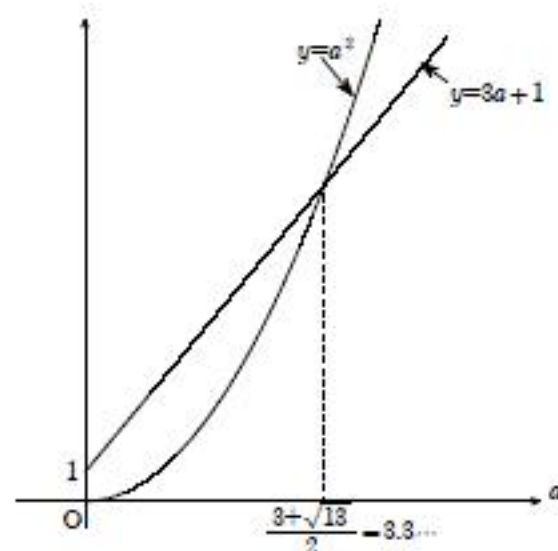
$$\cdot \boxed{a=3 \text{ のとき}} \quad n=27, 36, 45, 54, 63 \quad \sum_{n=27}^{63} q_n = 3+0+9+6+3=21 \quad \dots\dots ③$$

$$\begin{aligned} \cdot \boxed{4 \leq a \leq 99 \text{ のとき}} \quad & n = a^3, (a+1)a^2, (a+2)a^2, (a+3)a^2 \\ & a(a+1) \text{ で割った余りは, それぞれ } a, 0, a^2, a^2-a \\ & \sum_{n=a^3}^{10^6-1} q_n = \sum_{a=4}^{99} 2a^2 = \frac{1}{3} 99 \cdot 100 \cdot 199 - 28 \quad \dots\dots ④ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \boxed{a=100 \text{ のとき}} \quad & n=10^6 \quad 10^6 \text{ を } 100 \cdot 101 \text{ で割った余りを考えて,} \\ & \sum_{n=10^6}^{10^6} q_n = 100 \quad \dots\dots ⑤ \end{aligned}$$

①~⑤より,

$$4+8+21+\left(\frac{1}{3} \cdot 99 \cdot 100 \cdot 199 - 28\right)+100 = \underline{\underline{656805}}$$



(1)

$$\begin{aligned}\cos(n+\theta)+\cos(n-1)\theta &= 2\cos\frac{(n-1)+(n+1)}{2}\theta\cos\theta \\ &= 2\cos\theta\cos n\theta\end{aligned}$$

$$\text{より, } P_{n+1}(x)+P_{n-1}(x)=2xP_n(x)$$

$$\therefore \underline{\underline{P_{n+1}(x)=2xP_n(x)-P_{n-1}(x) \cdots \cdots \textcircled{1}}}}$$

$$(2) \quad P_1(x)=x:1\text{次}, \quad P_2(x)=2x^2-1:2\text{次}, \quad P_{n+1}(x)=2xP_n(x)-P_{n-1}(x)$$

より, $P_n(x)$ は n 次. $P_n(x)$ の n 次の係数を a_n とすると, ①より,

$$a_{n+1}=2a_n \text{ が成り立つ.}$$

$$\therefore \underline{\underline{2^{n-1}}}$$

$$(3) \quad \cos^2(500\theta)=(P_{500}(\cos\theta))^2$$

$\cos\theta=x$ とすると,

$$\begin{aligned}10^{1000}\cos^2(500\theta) &= 10^{1000}(P_{500}(x))^2 \\ &= 10^{1000}(2^{499}\cdot x^{500}+\cdots\cdots)^2 \\ &= 10^{1000}(2^{998}\cdot x^{1000}+\cdots\cdots)\end{aligned}$$

ここで, $x=\frac{1}{10}$ より,

$$10^{1000}(2^{998}x^{1000}+\cdots\cdots)=2^{998}+\frac{10^{1000}(\cdots\cdots)}{A}$$

$\cdots\cdots$ 部は 999 次以下なので, A 部の一の位は 0

また, 2^m (m :自然数)の一の位は, 2, 4, 8, 6 を繰り返すので,

2^{998} の一の位は 4

$$\therefore 10^{1000}\cos^2(500\theta) \text{ の一の位は } \underline{\underline{4}}$$