1

(1)
$$16(1-\sin^2\theta)^2+16\sin^2\theta=15$$
$$\Longleftrightarrow 16\sin^4\theta-16\sin^2\theta+1=0$$
$$\therefore \sin^2\theta=\frac{1-\cos2\theta}{2}=\frac{8\pm\sqrt{48}}{16}$$
$$=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$\therefore \cos2\theta=\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\text{（複号同順）}$$

ここで，$\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ より，$\frac{\pi}{2}\leqq2\theta\leqq\pi$ となり，$\underline{\underline{\cos2\theta\leqq0}}$

$$\therefore \underline{\cos2\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}}\quad\cdots\cdots\text{（答）}\quad\cdots\cdots①$$

(2) $\frac{\pi}{2}\leqq2\theta\leqq\pi$ に注意して，①より $2\theta=\frac{5}{6}\pi$，つまり $\underline{\underline{\theta=\frac{5}{12}\pi}}$

$$\sin\frac{5}{12}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}(=\sin\theta)$$
$$\cos\frac{5}{12}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}(=\cos\theta)$$

よって，

$$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\sin^3\frac{5}{12}\pi+\cos^3\frac{5}{12}\pi$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)^3+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^3$$
$$=\frac{12\sqrt{3}}{16\sqrt{2}}$$
$$=\underline{\frac{3\sqrt{6}}{8}}\quad\cdots\cdots\text{（答）}$$

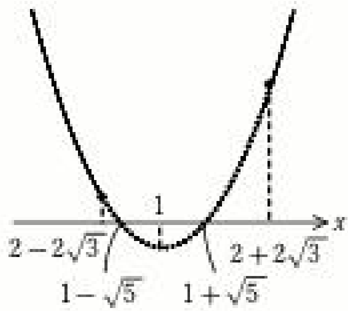
(3)
$$\sin7\theta+\sin5\theta=2\sin\frac{7\theta+5\theta}{2}\cdot\cos\frac{7\theta-5\theta}{2}\quad\leftarrow\text{（和}\rightarrow\text{積公式）}$$
$$=2\sin6\theta\cdot\cos\theta$$
$$\therefore \frac{\sin5\theta+\sin7\theta}{\cos\theta}=\frac{2\sin6\theta\cdot\cancel{\cos\theta}}{\cancel{\cos\theta}}$$
$$=2\sin6\theta$$
$$=2\sin\frac{5}{2}\pi\quad\left(\theta=\frac{5}{12}\pi\text{ より}\right)$$
$$=\underline{2}\quad\cdots\cdots\text{（答）}$$

2

(1)　$x^2+mx+m+2=0$　$x=\alpha,\beta$（2つの実数解）　……①

$D=m^2-4(m+2)=m^2-4m-8\geqq 0$

$\therefore m\leqq 2-2\sqrt{3},\ 2+2\sqrt{3}\leqq m$　……②



①で解と係数の関係より，

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-m\\ \alpha\beta=m+2\end{cases}\quad\cdots\cdots③$$

③を用いて，

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=m^2-2(m+2)\\&=m^2-2m-4\\&=(m-1)^2-5\end{aligned}$$

②より，　$\underline{m=2-2\sqrt{3}\text{ のとき }\alpha^2+\beta^2\text{ は最小となる}}$　……(答)

(2) $\alpha=2\beta$ のとき，③より $\begin{cases}3\beta=-m\\ 2\beta^2=m+2\end{cases}$

これより，

$$2\left(-\frac{m}{3}\right)^2=m+2\iff 2m^2-9m-18=0$$

$$\iff(2m+3)(m-6)=0$$

$\therefore\ \underline{m=-\frac{3}{2},\ 6\text{（②をみたす）}}$　……(答)

(3) ③より，

$$\alpha\beta=-\alpha-\beta+2$$

$$\iff\alpha\beta+\alpha+\beta=2$$

$$\iff(\alpha+1)(\beta+1)=3$$

$\alpha+1,\ \beta+1$ はともに整数より，

$(\alpha+1,\ \beta+1)=(1,3),\ (3,1),\ (-1,-3),\ (-3,-1)$

$\therefore(\alpha,\beta)=(0,\ \underbrace{2),\ (2}_{(m=-2)},\ 0),\ (-2,\ \underbrace{-4),\ (-4}_{(m=6)},\ -2)$

$m=-2,\ 6$ はともに②を満たす。

$\therefore\ \underline{m=-2,\ 6}$　……(答)

3

(1)　②より，　$x^2+y^2-2kx+3k=0$

$$\Longleftrightarrow (x-k)^2+y^2=k^2-3k$$

円の方程式を表すから，　$k^2-3k>0 \Longleftrightarrow k(k-3)>0$

$\therefore\ \underline{\underline{k<0,\ 3<k}}$　……(答)

(2) ①: $x^2+y^2=1$ 中心 $\mathrm{O}(0,0)$，半径 $r_1=1$

②: $(x-k)^2+y^2=k^2-3k$ 中心 $\mathrm{A}(k,0)$，半径 $r_2=\sqrt{k^2-3k}$ $(k<0,\ 3<k)$

(中心間距離)$=|k|$ だから，

$$\left|\sqrt{k^2-3k}-1\right|<|k|<\sqrt{k^2-3k}+1 \Longleftrightarrow \begin{cases} \left|\sqrt{k^2-3k}-1\right|<|k| & \cdots\cdots③ \\ |k|<\sqrt{k^2-3k}+1 & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

③より，

$$\left(\sqrt{k^2-3k}-1\right)^2<k^2$$

$$\Longleftrightarrow k^2-3k+1-2\sqrt{k^2-3k}<k^2$$

$$\Longleftrightarrow 1-3k<2\sqrt{k^2-3k} \qquad \cdots\cdots③'$$

(i) $3<k$ のとき，　③′はつねに成立　　$\therefore\ \underline{\underline{3<k}}$

(ii) $k<0$ のとき，　$0<1-3k<2\sqrt{k^2-3k}$

$\therefore\ (1-3k)^2<4(k^2-3k) \Longleftrightarrow 5k^2+6k+1<0$

$$\Longleftrightarrow (5k+1)(k+1)<0$$

$\therefore\ \underline{\underline{-1<k<-\frac{1}{5}}}$

④より，

$$k^2<\left(\sqrt{k^2-3k}+1\right)^2$$

$$\Longleftrightarrow k^2<k^2-3k+1+2\sqrt{k^2-3k}$$

$$\Longleftrightarrow 3k-1<2\sqrt{k^2-3k} \qquad \cdots\cdots④'$$

(iii) $k<0$ のとき，　④′はつねに成立　　$\therefore\ \underline{\underline{k<0}}$

(iv) $3<k$ のとき，　$0<3k-1<2\sqrt{k^2-3k}$

$\therefore\ (3k-1)^2<4(k^2-3k) \Longleftrightarrow 5k^2+6k+1<0$

$$\Longleftrightarrow (5k+1)(k+1)<0$$

$\therefore\ -1<k<-\frac{1}{5}$ (不適)

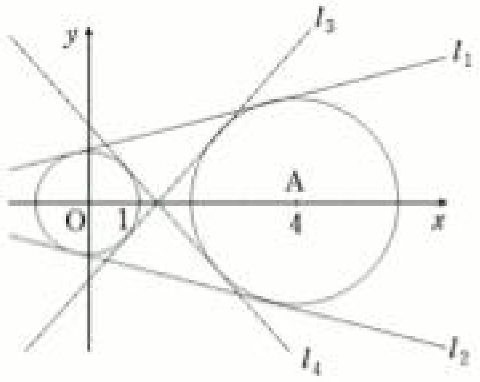
以上より，③と④を同時にみたす実数 k の値の範囲は

$\underline{\underline{-1<k<-\frac{1}{5}}}$　……(答)

(3) $(k=4$ のとき$)$

①: $x^2+y^2=1$ 中心 $\mathrm{O}(0,0)$，半径 $r_1=1$

②: $(x-4)^2+y^2=4$ 中心 $\mathrm{A}(4,0)$，半径 $r_2=2$



右図の通り，共通接線（共通内接線・共通外接線）は

すべて　$y=mx+n$　と表せる. $(m,n$ は実数$)$

$(mx-y+n=0)$

$$\begin{cases} \dfrac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}=1 & \cdots\cdots⑤ \\ \dfrac{|4m+n|}{\sqrt{m^2+1}}=2 & \cdots\cdots⑥ \end{cases}$$

⑤より，　$n^2=m^2+1$　……⑤′

$$(4m+n)^2=4(m^2+1)$$

⑥より，　$\Longleftrightarrow 16m^2+8mn+n^2=4m^2+4$

$$\Longleftrightarrow 12m^2+8mn+n^2=4 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots⑥'$$

⑤′, ⑥′より，

$$12m^2\pm 8m\sqrt{m^2+1}+m^2+1=4$$

$$\Longleftrightarrow 13m^2-3=\mp 8m\sqrt{m^2+1}$$

$$\therefore\quad (13m^2-3)^2=64m^2(m^2+1)$$

$$\Longleftrightarrow (15m^2-1)(7m^2-9)=0$$

$$\therefore\ m^2=\frac{1}{15},\ \frac{9}{7}$$

$$\therefore\ (m^2,n^2)=\left(\frac{1}{15},\frac{16}{15}\right),\left(\frac{9}{7},\frac{16}{7}\right)$$

以上より，求める接線は（上図より，m と n の組み合わせと符号に注意して）

$$\underline{\underset{(l_1)}{y=\frac{1}{\sqrt{15}}x+\frac{4}{\sqrt{15}}},\ \underset{(l_2)}{y=-\frac{1}{\sqrt{15}}x-\frac{4}{\sqrt{15}}},\ \underset{(l_3)}{y=\frac{3}{\sqrt{7}}x-\frac{4}{\sqrt{7}}},\ \underset{(l_4)}{y=-\frac{3}{\sqrt{7}}x+\frac{4}{\sqrt{7}}}} \quad \cdots\cdots(答)$$