

[1]

(1) 直線 $\beta z + \bar{\beta} \bar{z} + 1 = 0$ 上に 2 点 $P(1)$, $Q(\alpha)$ があるので,

$$\beta \cdot 1 + \bar{\beta} \cdot \bar{1} + 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\beta \cdot \alpha + \bar{\beta} \cdot \bar{\alpha} + 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成立する。①, ②を $\beta, \bar{\beta}$ の連立方程式として解く。

① $\times \bar{\alpha}$ - ② より,

$$\beta(\bar{\alpha} - \alpha) = 1 - \bar{\alpha}$$

$$\beta = \frac{1 - \bar{\alpha}}{\bar{\alpha} - \alpha} \quad \cdots \textcircled{3}$$

同様に ① $\times \alpha$ - ② より,

$$\bar{\beta} = \frac{1 - \alpha}{\alpha - \bar{\alpha}}$$

$$\text{これは③の複素共役である。} \quad \ast \bar{\beta} = \left(\frac{1 - \bar{\alpha}}{\bar{\alpha} - \alpha} \right) = \frac{1 - \alpha}{\alpha - \bar{\alpha}}$$

よって,

$$\beta = \frac{1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i \right)}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i \right)} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \left(= \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \cdots \text{答}$$

※ 次のように考えて計算することもできる。

直線 PQ 上の点 z を考えると,

3 点 $1, \alpha, z$ が一直線上にある

$$\Leftrightarrow \frac{z-1}{\alpha-1} \text{ が実数}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z-1}{\alpha-1} = \left(\frac{\overline{z-1}}{\overline{\alpha-1}} \right)$$

(2) $\beta z + \bar{\beta} \bar{z} + 1 = 0$ に $z = \frac{1}{w}$ を代入すると,

$$\beta \cdot \frac{1}{w} + \bar{\beta} \cdot \frac{1}{\bar{w}} + 1 = 0$$

$$\beta \bar{w} + \bar{\beta} w + w \bar{w} = 0 \quad \text{かつ} \quad w \neq 0$$

$$(w + \beta)(\bar{w} + \bar{\beta}) = \beta \bar{\beta} \quad \text{かつ} \quad w \neq 0$$

$$(w + \beta)(\overline{w + \beta}) = 1 \quad \text{かつ} \quad w \neq 0$$

$$|w + \beta|^2 = 1 \quad \text{かつ} \quad w \neq 0$$

$$|w - (-\beta)| = 1 \quad \text{かつ} \quad w \neq 0$$

よって点 w は点 $(-\beta)$ を中心とする半径 1 の円周を描く。ただし, 原点(0)は除く。 $\cdots$ 答

(3) (1)と同様に, 直線 PR は複素数 γ を用いて方程式 $\gamma z + \bar{\gamma} \bar{z} + 1 = 0$ で表せる。

この上に 2 点 $P(1)$, $R(\bar{\alpha})$ があることから,

$$\gamma \cdot 1 + \bar{\gamma} \cdot \bar{1} + 1 = 0$$

$$\gamma \cdot \bar{\alpha} + \bar{\gamma} \cdot \alpha + 1 = 0$$

が成立し, これを解くことで

$$\gamma = \frac{1 - \alpha}{\alpha - \bar{\alpha}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \left(= \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) \text{ とでる。}$$

次に点 z が直線 PR 上を動くとき, 点 $w = \frac{1}{z}$ が描く複素数平面上の図形を求める。

(2)と同様にして, $\gamma z + \bar{\gamma} \bar{z} + 1 = 0$ に $z = \frac{1}{w}$ を代入することで,

$$\gamma \cdot \frac{1}{w} + \bar{\gamma} \cdot \frac{1}{\bar{w}} + 1 = 0$$

整理して,

$$|w - (-\gamma)| = 1 \quad \text{かつ} \quad w \neq 0$$

よって点 w は点 $(-\gamma)$ を中心とする半径 1 の円周を描く。ただし原点(0)は除く。

最後に, 点 z が直線 QR 上を動くとき, 点 $w = \frac{1}{z}$ が描く複素数平面上の図形を求める。

直線 QR は 2 点 $O(0)$, $P(1)$ を結んだ線分の垂直二等分線だから, 方程式は,

$$|z| = |z - 1|$$

で与えられる。よって,

$$|z|^2 = |z - 1|^2$$

$$z \bar{z} = (z - 1)(\bar{z} - 1)$$

$$z + \bar{z} = 1$$

これに $z = \frac{1}{w}$ を代入して整理すると,

$$\frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}} = 1$$

$$w + \bar{w} = w \bar{w} \quad \text{かつ} \quad w \neq 0$$

$$(w - 1)(\bar{w} - 1) = 1 \quad \text{かつ} \quad w \neq 0$$

$$|w - 1| = 1 \quad \text{かつ} \quad w \neq 0$$

よって点 w は点 1 を中心とする半径 1 の円周を描く。ただし原点(0)は除く。

以上の結果と, 3 点 $P(z=1)$, $Q(z=\alpha)$, $R(z=\bar{\alpha})$ の $w = \frac{1}{z}$ による像が順に,

$$1, \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

であることとで, 点 z が三角形 PQR の周および内部を動くときの点 $z = \frac{1}{w}$ の動く範囲は

3 つの円で囲まれた図形, つまり図の斜線部分となり

その面積は,

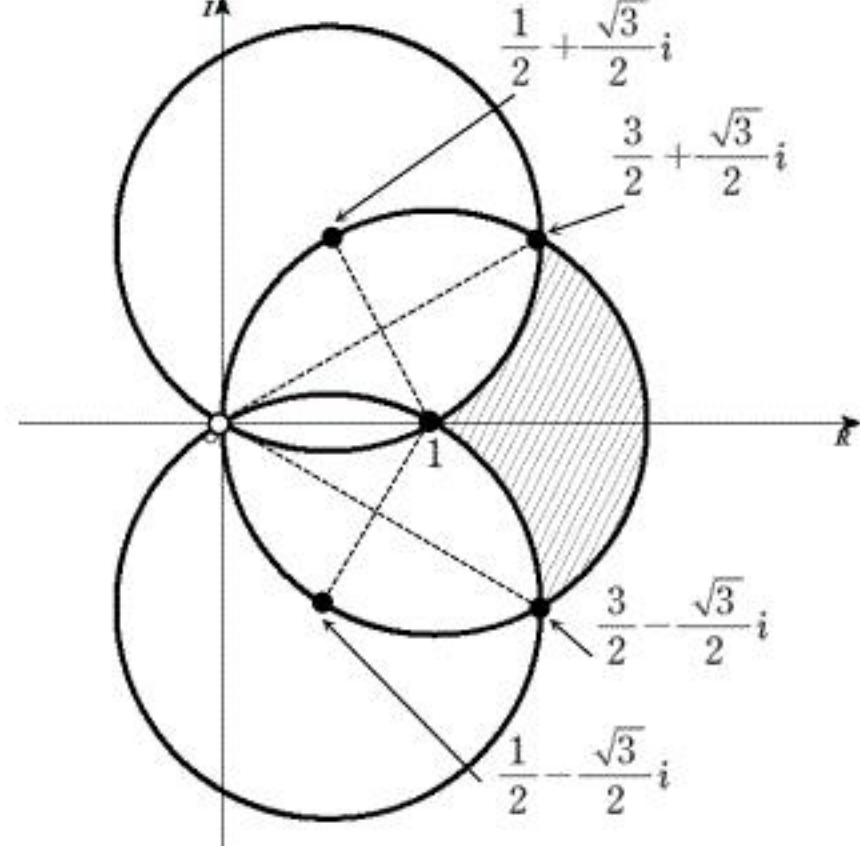
(中心角 240° の扇形の面積)

− (中心間の距離が 1,

半径 1 の 2 円の共通部分の面積)

$$= \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{240}{360} - 2 \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{2}{3} \pi - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin \frac{2}{3} \pi \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots \text{答}$$



[II]

(1) $f(x) = (2 - ax)e^{-a(x-2)}$ について,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -a \cdot e^{-a(x-2)} + (2 - ax) \cdot (-a)e^{-a(x-2)} \\ &= a(ax - 3)e^{-a(x-2)} \end{aligned}$$

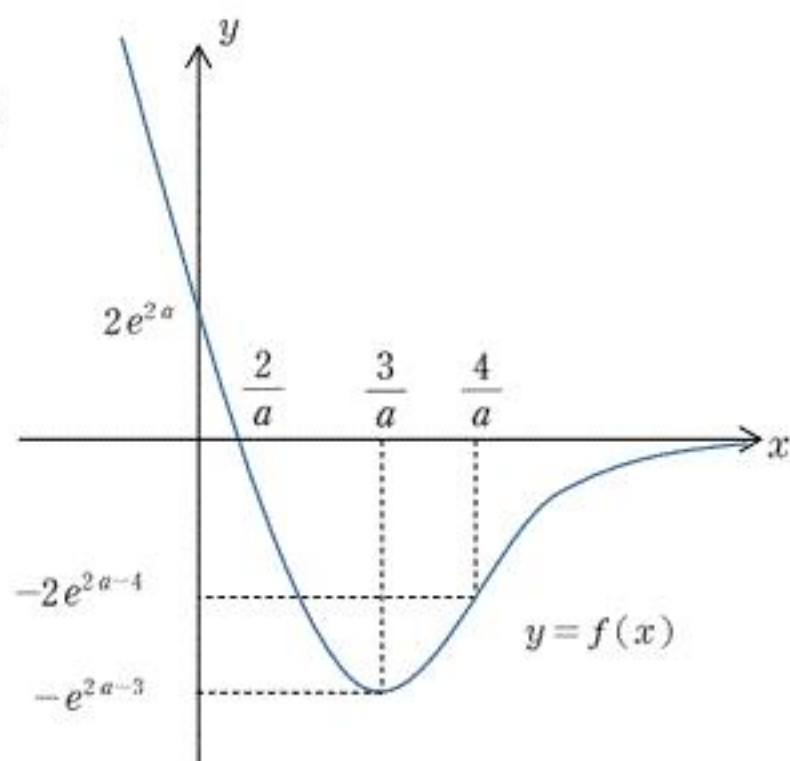
$$\begin{aligned} f''(x) &= a \{ a \cdot e^{-a(x-2)} + (ax - 3)(-a)e^{-a(x-2)} \} \\ &= a^2(4 - ax)e^{-a(x-2)} \end{aligned}$$

よって関数 $f(x)$ の増減は下のようになり,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

とで, グラフの概形は右のようになる。

x	...	$\frac{3}{a}$	...	$\frac{4}{a}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f''(x)$	+		+		-
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$



(2) (1)の結果より $p = \frac{3}{a}$ であり,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^p |f(x)| dx \\ &= \int_0^{\frac{2}{a}} (2 - ax)e^{2a-ax} dx + \int_{\frac{2}{a}}^{\frac{3}{a}} (ax - 2)e^{2a-ax} dx \\ &= \left[(2 - ax) \left(-\frac{1}{a} \right) e^{2a-ax} \right]_0^{\frac{2}{a}} - \int_0^{\frac{2}{a}} (-a) \left(-\frac{1}{a} \right) e^{2a-ax} dx \\ &\quad + \left[(ax - 2) \left(-\frac{1}{a} \right) e^{2a-ax} \right]_{\frac{2}{a}}^{\frac{3}{a}} - \int_{\frac{2}{a}}^{\frac{3}{a}} a \left(-\frac{1}{a} \right) e^{2a-ax} dx \\ &= - \left\{ 2 \left(-\frac{1}{a} \right) e^{2a} \right\} - \left[\left(-\frac{1}{a} \right) e^{2a-ax} \right]_0^{\frac{2}{a}} \\ &\quad + 1 \cdot \left(-\frac{1}{a} \right) e^{2a-3} - 0 + \left[\left(-\frac{1}{a} \right) e^{2a-ax} \right]_{\frac{2}{a}}^{\frac{3}{a}} \\ &= -\frac{2}{a} e^{2a-3} + \frac{2}{a} e^{2a-2} + \frac{1}{a} e^{2a} \\ &= \frac{e^3 + 2e - 2}{e^3} \cdot \frac{e^{2a}}{a} \quad \dots \text{答} \end{aligned}$$

(3) ここで $g(a) = \frac{e^{2a}}{a}$ とおくと $g'(a) = \frac{e^{2a}}{a}(2a - 1)$ となり,

a の関数 $g(a)$ の増減は右のようになる。

$$\frac{e^3 + 2e - 2}{e^3} > 0 \text{ だから, } S \text{ は}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

a	(0)	...	$\frac{1}{2}$	...
$g'(a)$		-	0	+
$g(a)$		$\searrow$		$\nearrow$

で極小かつ最小となる。 ...答

〔Ⅲ〕

(1) (i)

四面体 ABCD の頂点 D から平面 ABC へ下ろした垂線の足を H, 四面体 ABCP の頂点 P から平面 ABC へ下ろした垂線の足を H_p とすると,

直角三角形 $PAH_p \sim$ 直角三角形 DAH , 相似比は $|t|:1$

であるから $V_p = V \times |t|$ である。ゆえに,

$$\frac{V_p}{V} = |t| \quad \cdots \text{答}$$

(ii) $\vec{AP} = b\vec{AB} + c\vec{AC} + d\vec{AD}$ について $d\vec{AD} = \vec{AE}$ とおくと点 E は直線 AD 上の点であり,

$$\vec{AP} - \vec{AE} = b\vec{AB} + c\vec{AC}$$

$$\vec{EP} = b\vec{AB} + c\vec{AC}$$

よって点 P は点 E を通り平面 ABC に平行な平面上の点である。ABCP は四面体なので $d \neq 0$ であり, 2 点 D, P と平面 ABC の距離の比は $1:|d|$ だから,

$$\frac{V_p}{V} = |d| \quad \cdots \text{答}$$

(2) $\vec{OI} = \frac{\alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC} + \delta\vec{OD}}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$ について, 始点を A に変更すると, $L = \alpha + \beta + \gamma + \delta$ として,

$$\vec{AI} - \vec{AO} = \frac{\alpha}{L}(-\vec{AO}) + \frac{\beta}{L}(\vec{AB} - \vec{AO}) + \frac{\gamma}{L}(\vec{AC} - \vec{AO}) + \frac{\delta}{L}(\vec{AD} - \vec{AO})$$

$$\vec{AI} = \left(1 - \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{L}\right)\vec{AO} + \frac{\beta}{L}\vec{AB} + \frac{\gamma}{L}\vec{AC} + \frac{\delta}{L}\vec{AD}$$

$$\vec{AI} = \frac{\beta}{L}\vec{AB} + \frac{\gamma}{L}\vec{AC} + \frac{\delta}{L}\vec{AD}$$

このとき(1)(ii)の結果より四面体 IABC(体積を V_I とする)と四面体 DABC の体積比は $\frac{\delta}{L}:1$ なので,

$$V_I = V \times \frac{\delta}{L} = \frac{1}{3} \cdot \delta \cdot r$$

$$\text{より } r = \frac{3V}{L} = \frac{3V}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \quad \cdots \text{答}$$

(3) (2)を始点 B, C, D でそれぞれ同様の計算を行うことにより, 点 I と 4 つの平面までの距離は全て

$$\frac{3V}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} (=r)$$

であることが確認できる。点 I は四面体の内部にあるから, 点 I を中心とし, 半径 r の球面は四面体 ABCD に内接する。従って(2)の点 I は四面体 ABCD に内接する球の中心である。 $\cdots$ 証明終わり

[IV]

(1) $l=0,1,2,\cdots,n$ のとき, $p_l(t)={}_nC_l a^l t^n$ であることを l についての数学的帰納法にて示す。

(i) $l=0$ のとき,

$$p_0(t)=t^n ={}_nC_0 a^0 t^n$$

だから成立する。

(ii) $l=k$ (k は 0 以上 $n-1$ 以下の整数) のとき,

$$p_k(t)={}_nC_k a^k t^n$$

と仮定する。このとき,

$$\begin{aligned} p_{k+1}(t) &= a \cdot \frac{n-(k+1)+1}{k+1} p_k(t) \\ &= a \cdot \frac{n-k}{k+1} \cdot {}_nC_k a^k t^n \\ &= a \cdot \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k t^n \\ &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} a^{k+1} t^n \\ &={}_nC_{k+1} a^{k+1} t^n \end{aligned}$$

よって $l=k+1$ でも成立する。以上より, $l=0,1,2,\cdots,n$ のとき, $p_l(t)={}_nC_l a^l t^n$ である。

従って,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n p_k(t) &= \sum_{k=0}^n {}_nC_k a^k t^n \\ &= t^n \sum_{k=0}^n {}_nC_k a^k 1^{n-k} \\ &= t^n (a+1)^n \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(2) (1)の結果より,

$$t^n (a+1)^n = 1$$

を満たす。また $t(a+1)$ は正の実数だから,

$$t(a+1)=1$$

これを a について解いて,

$$a = \frac{1-t}{t} \quad \cdots \text{答}$$

(3) $p_k(t)={}_nC_k t^{n-k} (1-t)^k$

について, $1 \leq k \leq n-1$ のとき,

$$\begin{aligned} \frac{dp_k}{dt} &= {}_nC_k \{ (n-k)t^{n-k-1} (1-t)^k + t^{n-k} \cdot k(1-t)^{k-1} \cdot (-1) \} \\ &= {}_nC_k t^{n-k-1} (1-t)^{k-1} (n-k-nt) \end{aligned}$$

よって $0 < t < 1$ における t の関数 $p_k(t)$ の増減は

右のようになるから, $p_k(t)$ は $t = \frac{n-k}{n}$ で最大となる。

($k=0, n$ でもこれは正しい。)

従って,

$$T_k = \frac{n-k}{n} \quad \cdots \text{答}$$

(4) $E = \sum_{k=0}^n T_k \cdot p_k(t)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{n} \cdot {}_nC_k t^{n-k} (1-t)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{n} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} t^{n-k} (1-t)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} t^{n-k} (1-t)^k \\ &= t \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k t^{n-k-1} (1-t)^k \\ &= t \{ t + (1-t) \}^{n-1} \\ &= t \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

t	0	...	$\frac{n-k}{n}$	...	1
$p_k'(t)$		+	0	-	
$p_k(t)$		↗		↘	

[1V]

(1) p, q は実数とする。このとき、 $f(x)=0$ は少なくとも 1 つの実数解をもつので、それを $x=\alpha$ とすると、

$$g(\alpha) = \frac{-1}{\alpha+1}, \quad g(g(\alpha)) = \frac{-1}{g(\alpha)+1} = -\frac{\alpha+1}{\alpha}, \quad g(g(g(\alpha))) = -\frac{g(\alpha)+1}{g(\alpha)} = \alpha$$

も解である。さて、

$$-\frac{1}{\alpha+1} = -\frac{\alpha+1}{\alpha} \text{ とすると、 } \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \text{ より } \alpha \text{ は虚数}$$

同様に、 $-\frac{1}{\alpha+1} = \alpha$ 、 $-\frac{\alpha+1}{\alpha} = \alpha$ としても $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ より α は虚数

よって、 $-\frac{1}{\alpha+1}$ 、 $-\frac{\alpha+1}{\alpha}$ 、 α は全て異なる実数であり、すべて 3 次方程式 $f(x)=0$ の解である。

従って、解と係数の関係より、

$$-1 = -\frac{1}{\alpha+1} - \frac{\alpha+1}{\alpha} + \alpha \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$p = \left(-\frac{1}{\alpha+1}\right)\left(-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) + \left(-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\alpha + \alpha\left(-\frac{1}{\alpha+1}\right) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$q = -\left(-\frac{1}{\alpha+1}\right)\left(-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\alpha = -1 \quad \cdots \text{答}$$

が成立する。②から、

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{\alpha} - \alpha - 1 - \frac{\alpha}{\alpha+1} \\ &= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} - \alpha - 2 \end{aligned}$$

①から、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} &= \alpha \text{ なので、} \\ p &= \alpha - \alpha - 2 = -2 \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(2) $f(x)=x^3+x^2-2x-1$ について、

$$f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - 2(-2) - 1 = -1 < 0$$

$$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) - 1 = 1 > 0$$

$$f(0) = -1 < 0$$

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 2 \cdot 2 - 1 = 7 > 0$$

より $-2 < x < -1$ 、 $-1 < x < 0$ 、 $0 < x < 2$ にそれぞれ実数解が少なくとも 1 つずつ存在する。

(連続関数の中間値の定理より)

また $f(x)=0$ は x の 3 次方程式だから、高々 3 つの実数解をもつ。よって、

$f(x)=0$ は $-2 < x < 2$ の範囲に(異なる)3 つの実数解をもつ。 $\cdots$ 証明終わり

(3) $f(x)=0$ の解の 1 つを $x=\alpha$ とする。(2)の結果から $-2 < \alpha < 2$ だから、

$$\alpha = 2\cos\theta \quad (0 < \theta < \pi)$$

とおける。このとき、

$$\begin{aligned} 2\cos 2\theta &= 2(2\cos^2\theta - 1) \\ &= 2\left\{2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 1\right\} \\ &= \alpha^2 - 2 \end{aligned}$$

ここで $\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0$ から $(\alpha^2 - 2)(\alpha + 1) = -1$ だから、

$$\alpha^2 - 2 = -\frac{1}{\alpha+1} \text{ となり、これは } f(x)=0 \text{ の解である。また、}$$

$$\begin{aligned} 2\cos 3\theta &= 2(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) \\ &= 2\left\{4\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{\alpha}{2}\right\} \\ &= \alpha^3 - 3\alpha \end{aligned}$$

$$\text{ここで } \alpha^3 - 3\alpha = -\frac{\alpha+1}{\alpha} \cdots \textcircled{3} \text{ となることを示す。}$$

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow (\alpha-1)(\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha - 1) = 0$$

であるが、これは成立する。よって、 $2\cos 3\theta$ も $f(x)=0$ の解である。 $\cdots$ 証明終わり

(4) $x=2\cos\theta$ ($0 < \theta < \pi$) が $f(x)=0$ の解であるとき、(3)の結果より、

$2\cos\theta$ 、 $2\cos 2\theta$ 、 $2\cos 3\theta$ は x の 3 次方程式 $f(x)=0$ の異なる 3 つの実数解である。よって、

$2\cos\theta = \alpha$ とすると、(3)の計算により、

$$g(2\cos 2\theta) = g(\alpha^2 - 2) = g\left(-\frac{1}{\alpha+1}\right) = -\frac{\alpha+1}{\alpha} = 2\cos 3\theta$$

また $2\cos 2\theta = \beta$ とすると $f(\beta)=0$ だから(3)と同様の計算を行うことで、

$$g(2\cos 2\theta) = g(\beta) = \beta^2 - 2 = 4\cos^2 2\theta - 2 = 2\cos 4\theta$$

が成立する。従って、

$$2\cos 4\theta = 2\cos 3\theta$$

が成立する。

$$\cos 4\theta = \cos 3\theta$$

から $4\theta = \pm 3\theta + 2n\pi$ (n は整数)となり、

$$\theta = 2n\pi, \quad \theta = \frac{2n\pi}{7}$$

となるが、 $2\cos\theta \neq 2$ であるから $\theta \neq 2n\pi$ である。

$$\text{よって、} \theta = \frac{2n\pi}{7} \quad (0 < \theta < \pi) \text{ から } n=1, 2, 3 \text{ として、}$$

$$\theta = \frac{2\pi}{7}, \quad \frac{4\pi}{7}, \quad \frac{6\pi}{7} \quad \cdots \text{答}$$

※問題文には p, q についての条件の表記が無かったが、実数として解答した。

もし、複素数として考えるのであれば、以下のように考えればよい。

$$\text{まずは複素数 } \alpha \text{ が } f(x)=0 \text{ の解の一つであるとする。このとき条件より、} g(\alpha) = -\frac{1}{\alpha+1},$$

$$g(g(\alpha)) = -\frac{\alpha+1}{\alpha} \text{ も解である。そこで、} \alpha, -\frac{1}{\alpha+1}, -\frac{\alpha+1}{\alpha} \text{ のうち 2 つが一致するとしたら、いずれに}$$

$$\text{せよ } \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \text{ が成立する。このとき } f(\alpha) = 0 \text{ が成立するので、} f\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) = 0 \text{ または}$$

$$f\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right) = 0 \text{ が成立するが、いずれにせよ矛盾が起こることが確認できる。よって } \alpha^2 + \alpha + 1 \neq 0 \text{ であり、}$$

$$\text{このとき } \alpha, -\frac{1}{\alpha+1}, -\frac{\alpha+1}{\alpha} \text{ は全て異なる。この後、解答の解と係数の関係の話につなげればよい。}$$