

数 学

(問 題)

2017年度

〈2017 H29110015 (数学)〉

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで、問題冊子および解答用紙には手を触れないこと。
2. 問題は4～5ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚損等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせること。
3. 解答はすべて、HBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルで記入すること。
4. 解答用紙記入上の注意
 - (1) 解答用紙の所定欄（2カ所）に、氏名および受験番号を正確に丁寧に記入すること。
 - (2) 所定欄以外に受験番号・氏名を書いてはならない。
 - (3) 受験番号の記入にあたっては、次の数字見本にしたがい、読みやすいように、正確に丁寧に記入すること。

数 字 見 本	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

- (4) 受験番号は右詰めで記入し、余白が生じる場合でも受験番号の前に「0」を記入しないこと。

(例) 3825番⇒	万	千	百	十	一
	3	8	2	5	

5. 解答はすべて所定の解答欄に記入すること。所定欄以外に何かを記入した解答用紙は採点の対象外となる場合がある。
6. 試験終了の指示が出たら、すぐに解答をやめ、筆記用具を置き解答用紙を裏返しにすること。
7. いかなる場合でも、解答用紙は必ず提出すること。
8. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

1 次の各問の解答を解答用紙の所定欄に記入せよ。

- (1) 座標平面上で、点 $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$ を考える。点 P が点 B から点 C まで動くとき、正方形 $AOBC$ の辺および内部において、線分 OP の垂直二等分線が通る範囲の面積を求めよ。
- (2) n を 2 以上の自然数とする。1 から n までの自然数の順列

$$a_1 a_2 \cdots a_n$$

のうち、 $a_k < a_{k+1}$ を満たさないような k がただ 1 つだけある順列の総数を P_n とする。例えば $n = 3$ の場合、条件を満たす順列全体は $\{132, 213, 231, 312\}$ であるので、 $P_3 = 4$ である。 P_{n+1} と P_n の関係式を求めよ。

- (3) 整数係数の 3 次多項式 $f(x)$ が $f(0) = 1$ かつ $f(\cos \frac{\pi}{7}) = 0$ を満たすとき、 $f(x)$ を求めよ。
- (4) 定数 c は $-1 < c < 1$ を満たすとする。すべての実数 x に対して、関係式

$$f(x) + f(cx) = x^2$$

を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ。

2 3 つの複素数 α, β, z は次の関係式

$$\alpha + \beta = z, \quad \alpha\beta = i\bar{z}, \quad \alpha\beta \neq 0$$

を満たしているとする。ただし、 i は虚数単位、 $\bar{z}$ は z の共役な複素数とする。このとき $\frac{\alpha}{\beta}$ が実数であるような z の条件を求め、そのような z の集合を複素数平面上に図示せよ。

3 四面体 $OABC$ において、 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1$, $\angle AOB = \frac{\pi}{6}$, $\angle BOC = \frac{\pi}{4}$, $\angle COA = \frac{\pi}{3}$ であるとする。次の問に答えよ。

- (1) 頂点 C から三角形 OAB を含む平面に下ろした垂線を CD とするとき、 $\overrightarrow{OD}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。
- (2) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。

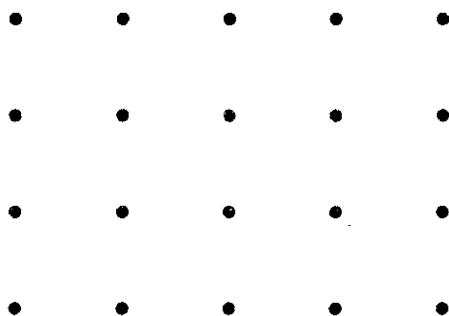
- 4 平面全体に縦横同じ間隔で電球が置かれていて、次の規則で点滅を繰り返すとする。

初めはすべての電球が消えている。

ある1個の電球が1秒後に点灯し、2秒後にその周りに隣接する8個の電球が点灯する。3秒後には、さらにその外側に隣接する電球が点灯する。一般に $n+1$ 秒後には、 n 秒目に初めて点灯した電球の外側に隣接する電球が点灯する。

一度点灯した電球は「2秒間点灯して次の1秒間消灯」を繰り返す。

下の図は電球の配置の一部分を示している。



$n \geq 1$ とする。 n 秒後に初めて点灯する電球の個数を a_n とし、 n 秒後に点灯している電球の個数を b_n として、次の問に答えよ。

- (1) a_n を n を用いた式で表せ。
- (2) b_n を n を用いた式で表せ。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^2}$ を求めよ。

〔以 下 余 白〕

