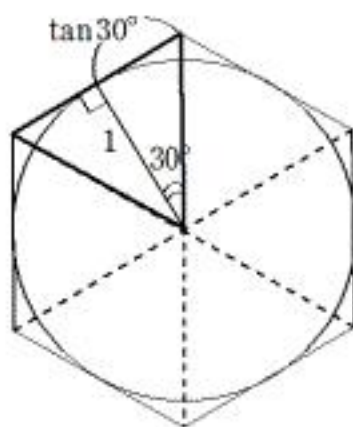


問 1

(1) 求める面積は

$$\begin{aligned}
 & \tan 30^\circ \times 6 \\
 &= \tan 30^\circ \times 6 \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \times 6 \\
 &= \underline{2\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$



(2)

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ y > 1 \\ xy = 4 \end{cases}$$

条件より,

$$y = \frac{4}{x}$$

図より,

$$1 \leq x < 4$$

$$1 < y \leq 4$$

このとき,

$$\begin{aligned}
 z &= (\log_2 x)^2 \left(\log_2 2 \times \frac{4}{x} \right) \\
 &= (\log_2 x)^2 \times (3 - \log_2 x)
 \end{aligned}$$

$t = \log_2 x$ とおくと,

$$1 \leq x < 4 \text{ より, } 0 \leq t < 2$$

$$\begin{aligned}
 z &= t^2 (3 - t) \\
 &= -t^3 + 3t^2 \\
 &= f(t)
 \end{aligned}$$

とおく.

$f(t)$ の $0 \leq t < 2$ における増減表から, とり得る値の範囲を考える.

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= -3t^2 + 6t \\
 &= -3t(t - 2)
 \end{aligned}$$

$$f'(t) = 0 \text{ として, } t = 0, 2$$

増減表

t	0	...	2
$f'(t)$	0	+	0
$f(t)$	0	↗	4

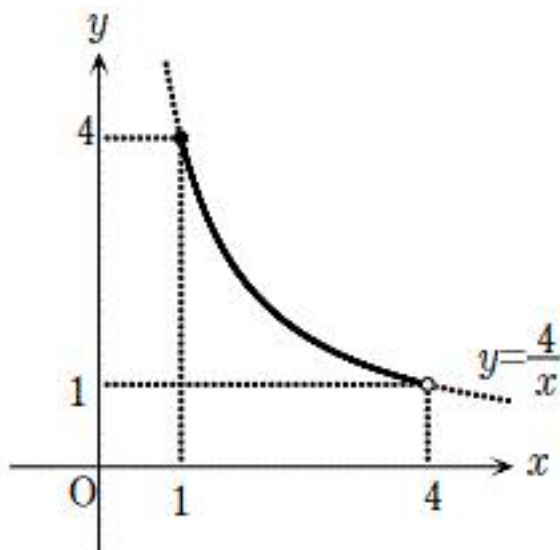
よって,

$$\begin{aligned}
 0 &\leq f(t) < 4 \\
 \therefore \quad 0 &\leq z < 4
 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 (\text{平均}) &= \frac{25 \times 0 + 75 \times 100}{100} \\
 &= \underline{75 \text{ 点}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{標準偏差}) &= \sqrt{(\text{偏差の 2 乗の平均})} \\
 &= \sqrt{\frac{(0 - 75)^2 \times 25 + (100 - 75)^2 \times 75}{100}} \\
 &= \sqrt{\frac{75^2 \times 25 + 25^2 \times 75}{100}} \\
 &= \sqrt{\frac{25^2 \times (9 + 3)}{4}} \\
 &= \underline{25\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$



問 2

(1)

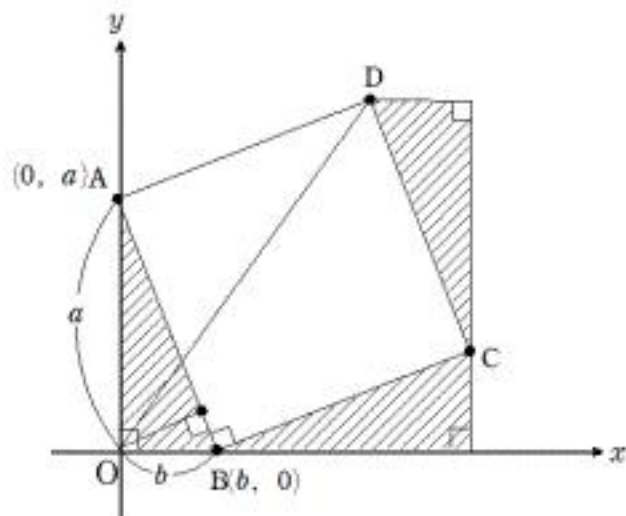
斜線をひいた直角三角形の合同から、

$$C(a+b, b)$$

$$D(a, a+b)$$

とわかる.

$$\therefore \underline{(a+b, b), (a, a+b)}$$



(2)

$a > b > 0$ より, OP が最大となるのは, $P=D$ のとき.
よって, 求める最大値は

$$\sqrt{a^2 + (a+b)^2} = \underline{\underline{\sqrt{2a^2 + 2ab + b^2}}}$$

(3)

線分 OP が最小となるのは, O から AB におろした垂線の足に P がくるとき.

直線 OP の式は $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$ より,

点と直線の距離の公式から, 求める長さは

$a > 0, b > 0$ に注意して,

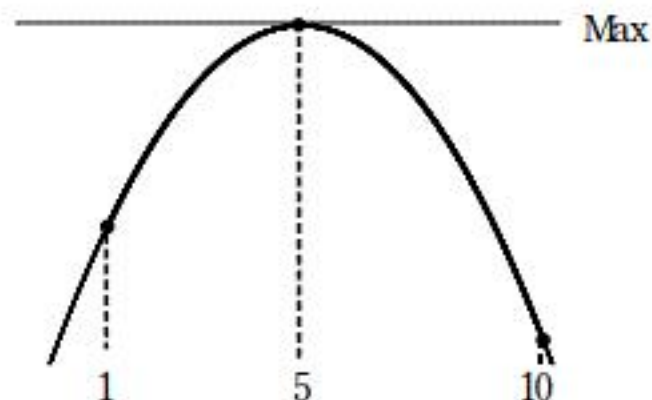
$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

問3

- (1) 売上を z とすると,

$$\begin{aligned} z &= py \\ &= (10-y) \times y \\ &= -y^2 + 10y \\ &= -(y-5)^2 + 25 \end{aligned}$$

図より、 $y=5, p=5$ のとき最大となる。



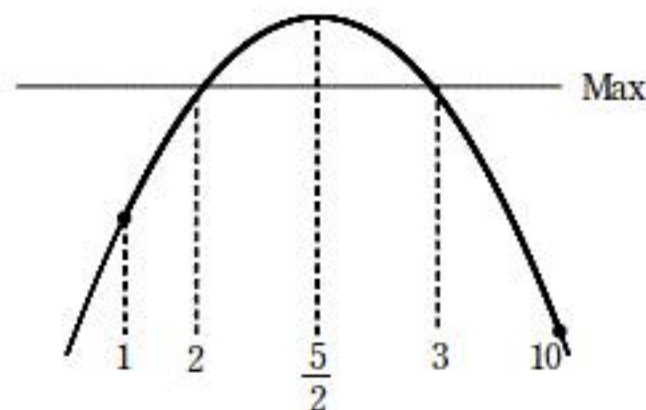
- (2) 利益を w とすると,

$$\begin{aligned} w &= py - y^2 \\ &= (10-y) \times y - y^2 \\ &= -2y^2 + 10y \\ &= -2\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{2} \end{aligned}$$

y が整数であることに注意すれば、図より、

$y=2, p=8$ のとき、または $y=3, p=7$ のとき最大となる。

よって、 $(y, p) = (2, 8), (3, 7)$

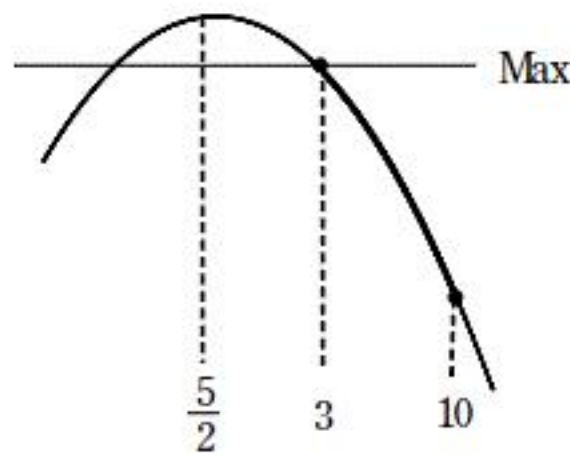


- (3) 利益を u とすると,

$$\begin{aligned} u &= py - (y^2 + 20y - 20) \\ &= (10-y) \times y - y^2 - 20y + 20 \\ &= -2y^2 - 10y + 20 \\ &= -2\left(y + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{65}{2} \end{aligned}$$

y が1以上の整数であることに注意すれば、図より、

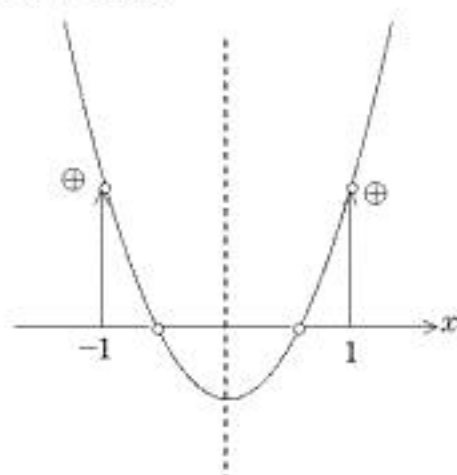
$y=1, p=9$ のとき最大となる。



問4

- (1) $x^2 - ax - b = 0$ の解 α, β が実数であり、ともに -1 より大きく 1 より小さい条件を求める。
 $f(x) = x^2 - ax - b$ とおくと、条件より、グラフは次のようになる。

$$\begin{cases} \text{判別式} & D \geq 0 & \cdots \cdots ① \\ \text{軸} & -1 < x < 1 & \cdots \cdots ② \\ \text{端点} & f(-1) > 0 & \cdots \cdots ③ \\ & f(1) > 0 & \cdots \cdots ④ \end{cases}$$



①について

$$D = a^2 + 4b \geq 0$$

$$\therefore b \geq -\frac{1}{4}a^2$$

②について

$$-1 < \frac{a}{2} < 1$$

$$\therefore -2 < a < 2$$

③について

$$f(-1) = 1 + a - b > 0$$

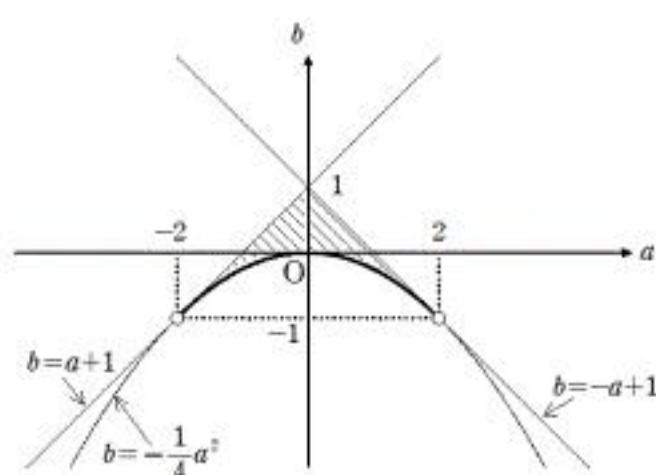
$$\therefore b < a + 1$$

④について

$$f(1) = 1 - a - b > 0$$

$$\therefore b < -a + 1$$

これらを図示すれば、下図斜線部（境界は放物線の $-2 < a < 2$ の区間のみ含む）



$$\left(b = -\frac{1}{4}a^2 \text{ と } b = a + 1, b = -a + 1 \text{ はそれぞれ接する} \right)$$

- (2) α が虚数のとき、 $\beta = \overline{\alpha}$ である。
 解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha\beta = -b \end{cases}$$

$$\alpha\beta = -b$$

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}} = \sqrt{\alpha\beta} = \underline{\sqrt{-b}}$$

(別解)

解の公式より、

$$\alpha = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

$a^2 + 4b < 0$ のとき、

$$\alpha = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{-(a^2 + 4b)}}{2}i$$

とかける。よって、

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-(a^2 + 4b)}}{2}\right)^2} \\ &= \underline{\sqrt{-b}} \end{aligned}$$

- (3) α が虚数のとき、(2)より、 $|\alpha| = |\beta| = \sqrt{-b}$ である。

$$a^2 + 4b < 0 \text{ かつ } \sqrt{-b} < 1$$

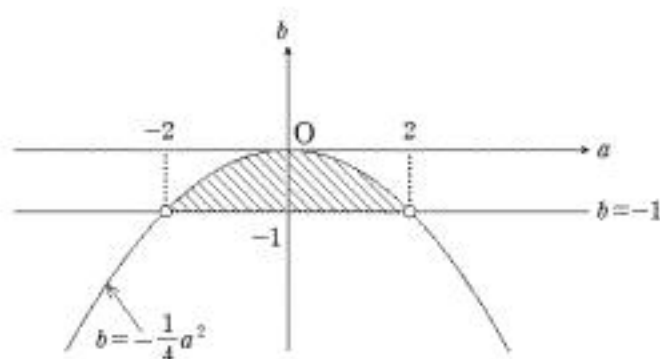
であるから、

$$\begin{cases} a^2 + 4b < 0 \\ 0 \leq -b < 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} b < -\frac{1}{4}a^2 \\ -1 < b \leq 0 \end{cases}$$

この2式をともにみたす。

これを図示すれば、右図斜線部（境界は含まない）。



問 5

- (1) チーム A が全勝すれば、他のチームの勝敗によらず、A は優勝なので求める確率は

$$\underline{p^3}$$

- (2) 全部で 6 試合行われる.

A-B B-C
A-C B-D
A-D C-D

たとえば、A が B, C に勝ち、D に負けるとき、勝ったチームに○をつけるとき、

○A-B B-C
○A-C B-D
A-○D C-D

B, C, D の結果により、A の優勝が決まる.

A が 2 勝 1 敗でも優勝できないのは、D が全勝するときなので、それを除けばよい.

○A-B B-C ←どちらでもよい
○A-C B-○D
A-○D C-○D

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} \text{B-C の結果} \\ \swarrow \\ p^2 \times (1-p) \times 1^3 - p^2 \times (1-p) \times 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leftarrow \text{D が B, C に勝つ} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{A が B, C に勝つ} \quad \text{A が D に負ける} \\ \text{その他の試合結果} \end{array} \\ & = \frac{3}{4} p^2 (1-p) \end{aligned}$$

同様に、B に負けるとき、C に負けるときも考えれば、求める確率は

$$\frac{3}{4} p^2 (1-p) \times 3 = \underline{\frac{9}{4} p^2 (1-p)}$$

- (3) (2)と同様に勝敗を○で表せば

○A-B B-C
A-○C B-D
A-○D C-D ←どっちが勝っても 2 勝目

A が B に勝ち、C, D に負けるとき、C と D の対戦においてどちらが勝っても 2 勝目となり、A の優勝はない. 他の場合も同様であるから、求める確率は 0

- (4)

[結論]

リーグ戦の方が確率が高い

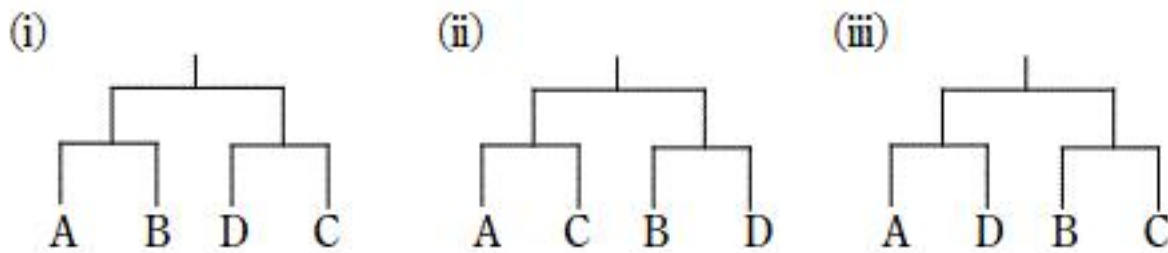
[理由]

リーグ戦で A が優勝する確率は(1)~(3)より、

$$\begin{aligned} & p^3 + \frac{9}{4} p^2 (1-p) + 0 \\ & = \frac{9}{4} p^2 - \frac{5}{4} p^3 = f(p) \end{aligned}$$

とおく.

トーナメント戦で A が優勝する確率について、まず、トーナメント表は次の 3 通りが考えられる.



いずれの場合も A が優勝する確率は等しく

$$\underset{\text{A が勝つ}}{p} \times \underset{\text{他の結果}}{1} \times \underset{\text{決勝で A が勝つ}}{p} = p^2$$

であるから、トーナメント戦で A が優勝する確率は、

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{(i) の表になり} \\ \text{A が優勝する}}}{\frac{1}{3} p^2} + \underset{\text{(ii)}}{\frac{1}{3} p^2} + \underset{\text{(iii)}}{\frac{1}{3} p^2} = p^2 = g(p) \text{ とおく.}$$

ここで、

$$\begin{aligned} f(p) - g(p) &= \frac{9}{4} p^2 - \frac{5}{4} p^3 - p^2 \\ &= \frac{5}{4} p^2 (1-p) \end{aligned}$$

$0 < p < 1$ より、

$$\begin{aligned} f(p) - g(p) &> 0 \\ \therefore f(p) &> g(p) \end{aligned}$$

ゆえに、リーグ戦の方が確率が高い.