

1

(1) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とする.

$$\begin{aligned} f(1+i) &= (-2a+c+d) + (2a+2b+c)i \\ &= 4+3i \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} -2a+c+d=4 \\ 2a+2b+c=3 \end{cases} \cdots\cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} f(1+2i) &= (-11a-3b+c+d) + (-2a+4b+2c)i \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} -11a-3b+c+d=4 \\ -2a+4b+2c=0 \end{cases} \cdots\cdots \textcircled{2}$$

①②より,

$$a=1, b=-3, c=7, d=-1$$

$$\therefore \underline{f(x)=x^3-3x^2+7x-1}$$

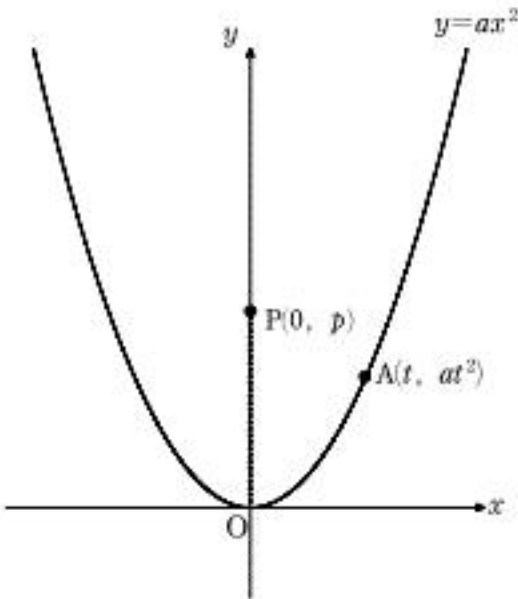
(2) $a>0, p>0$

$A(t, at^2)$ とおく.

$$\begin{aligned} AP^2 &= (t-0)^2 + (at^2-p)^2 \\ &= a^2t^4 - (2ap-1)t^2 + p^2 \\ &= a^2\left(t^2 - \frac{2ap-1}{2a^2}\right)^2 + p^2 - \frac{(2ap-1)^2}{4a^2} \end{aligned}$$

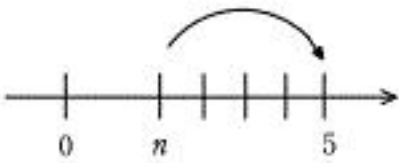
$\frac{2ap-1}{2a^2} \leq 0$ のとき, $t=0$ で AP の長さは最小となる.

$$\begin{aligned} \therefore 2ap-1 \leq 0 &\Leftrightarrow a \leq \frac{1}{2p} \\ &\therefore \underline{\underline{\frac{1}{2p}}} \end{aligned}$$



(3) $x=n$ から $x=5$ に到達して終了する確率を p_n とすると, はじめの 1 回目の移動で場合分けすると,

$$p_n = \frac{2}{3}p_{n+1} + \frac{1}{3}p_{n-1} \cdots\cdots \textcircled{1}$$



$$x = \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 1, \frac{1}{2} \text{ より,}$$

①の解は $p_n = A\left(\frac{1}{2}\right)^n + B$ の形になる.

$p_0=0, p_5=1$ より,

$$p_0 = A+B=0$$

$$p_5 = \frac{1}{32}A+B=1$$

$$\therefore A = -\frac{32}{31}, B = \frac{32}{31}$$

$$\therefore p_n = -\frac{32}{31} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{32}{31}$$

求める確率は, $n=1$ として,

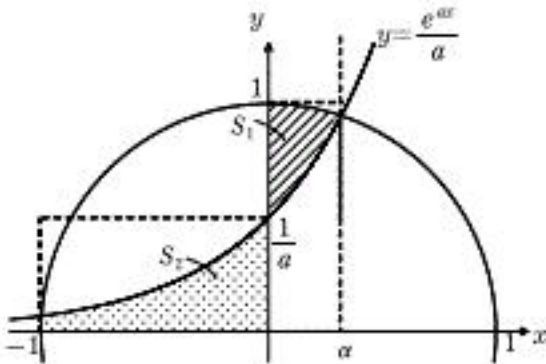
$$\underline{\underline{\frac{16}{31}}}$$

(4) $x^2+y^2=1$ と $y=\frac{e^{ax}}{a}$ の第一象限における交点の x 座標を α

とおく.

$$x^2+y^2 \leq 1, y \geq \frac{e^{ax}}{a}, x \geq 0 \text{ の表す領域の面積を } S_1,$$

$$x^2+y^2 \leq 1, y \leq \frac{e^{ax}}{a}, x \leq 0, y \geq 0 \text{ の表す領域の面積を } S_2$$



とおく。

$$\sqrt{1-\alpha^2} = \frac{e^{a\alpha}}{a} < 1$$

$$\therefore \alpha < \frac{\log a}{a}$$

$$0 < S_1 < 1 \cdot \alpha < \frac{\log a}{a}$$

$$a \rightarrow \infty \text{ で } \frac{\log a}{a} \rightarrow 0 \text{ より, } S_1 \rightarrow 0 \cdots\cdots \textcircled{1}$$

$$\text{同様に, } 0 < S_2 < 1 \cdot \frac{1}{a}$$

$$a \rightarrow \infty \text{ で } \frac{1}{a} \rightarrow 0 \text{ より, } S_2 \rightarrow 0 \cdots\cdots \textcircled{2}$$

$$S(a) = \frac{1}{4}\pi + S_1 - S_2 \text{ より, ①, ②から,}$$

$$\begin{aligned} S(a) &\rightarrow \left(\frac{1}{4}\text{円の面積}\right) = \frac{1}{4}\pi \\ &\therefore \underline{\underline{\frac{1}{4}\pi}} \end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 & |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = |\vec{a} + \vec{b} + \vec{d}|^2 \\
 \Leftrightarrow & \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{d} + \vec{d} \cdot \vec{a} \\
 \Leftrightarrow & (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{d}) = 0 \quad \dots\dots ①
 \end{aligned}$$

$$① \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \quad \dots\dots ② \quad \text{あるいは} \quad (\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{c} - \vec{d}) \quad \dots\dots ③ \quad (\because \vec{c} \neq \vec{d})$$

$$② \Leftrightarrow \vec{b} = -\vec{a} \quad \text{このとき「点 O は辺 AB 上」} \quad \dots\dots ②'$$

$$③ \text{において, } |\vec{a}| = |\vec{b}| \text{ より, } (\vec{a} + \vec{b}) \perp \overline{AB} \text{ であることと合わせて,}$$

$$\begin{cases} (\vec{a} + \vec{b}) \perp \overline{AB} \\ (\vec{a} + \vec{b}) \perp \overline{CD} \end{cases} \text{ より, 「辺 AB と辺 CD は平行」} \quad \dots\dots ③'$$

②'③'より, 題意は示せた. (証明終わり)

(2) 条件より,

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \right| = \left| \frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{3} \right| = \left| \frac{\vec{c} + \vec{d} + \vec{a}}{3} \right| = \left| \frac{\vec{d} + \vec{a} + \vec{b}}{3} \right| \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = |\vec{d} + \vec{a} + \vec{b}| \\ |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = |\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}| \\ |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = |\vec{c} + \vec{d} + \vec{a}| \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{d}) = 0 \\ (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{d}) = 0 \\ (\vec{a} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{d}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{AB} // \text{CD} \text{ or } \vec{b} = -\vec{a} & \dots\dots ④ \\ \text{BC} // \text{AD} \text{ or } \vec{c} = -\vec{b} & \dots\dots ⑤ \\ \text{AC} // \text{BD} \text{ or } \vec{c} = -\vec{a} & \dots\dots ⑥ \end{cases}
 \end{aligned}$$

問題文より, AD, BD は対角線なので,

$$\text{AC} \not\parallel \text{BD} \quad \therefore ⑥ \Leftrightarrow \vec{c} = -\vec{a} \quad \dots\dots ⑥'$$

A, B, C, D は異なる 4 点なので,

$$\vec{a} \neq \vec{b} \quad \therefore ⑤ \Leftrightarrow \text{BC} // \text{AD} \quad \dots\dots ⑤'$$

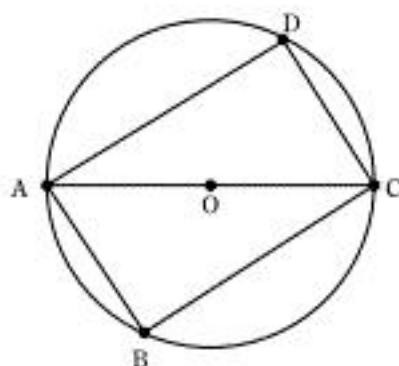
$$\vec{b} \neq \vec{c} \quad \therefore ④ \Leftrightarrow \text{AB} // \text{CD} \quad \dots\dots ④'$$

⑥'より, 辺 AC は直径なので,

$$\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ \quad \dots\dots ⑥''$$

④'⑤'⑥''より,

4 角形 ABCD は長方形 (証明終わり)



(1)

$$\left|1 + \frac{i}{n}\right|^n = r_n^n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{2n}}$$

問題文より, $1 < \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < 3$. 各辺を $\frac{1}{2n} (> 0)$ 乗する.

$$1 < \left\{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right\}^{\frac{1}{2n}} < 3^{\frac{1}{2n}}$$

$n \rightarrow \infty$ で $3^{\frac{1}{2n}} \rightarrow 1$ より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left|1 + \frac{i}{n}\right|^n = 1$

(2)

$$r_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n}$$

$$1 + \frac{i}{n} = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} (\cos \theta + i \sin \theta) = r_n (\cos \theta + i \sin \theta)$$

と表すこととする.

$$\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n = r_n^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad \dots\dots ①$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\sin \theta < \theta < \tan \theta$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} < \theta < \frac{1}{n}$$

各辺 n 倍して

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} < n\theta < 1$$

$n \rightarrow \infty$ で $\frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} \rightarrow 1$ より, $n\theta \rightarrow 1$

①に適用して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n^n \cos n\theta = 1 \cdot \cos 1$$

$$= \underline{\cos 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n^n \sin n\theta = 1 \cdot \sin 1$$

$$= \underline{\sin 1}$$

(2) <別解>

マクローリン展開より,

$$\begin{cases} e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\dots & \dots\dots ① \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\dots & \dots\dots ② \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\dots & \dots\dots ③ \end{cases}$$

①において, $x = ix$ を代入し, ②, ③を用いると,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (\text{オイラーの公式})$$

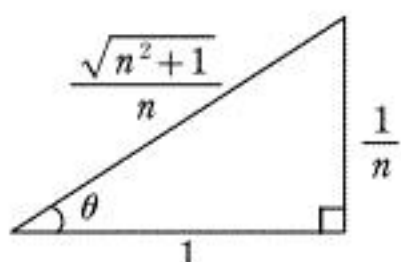
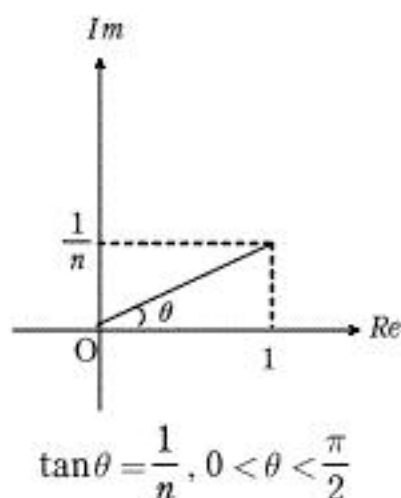
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{i}{n}\right)^n \right) = \frac{1}{2} (e^i + e^{-i})$$

$$= \underline{\cos 1}$$

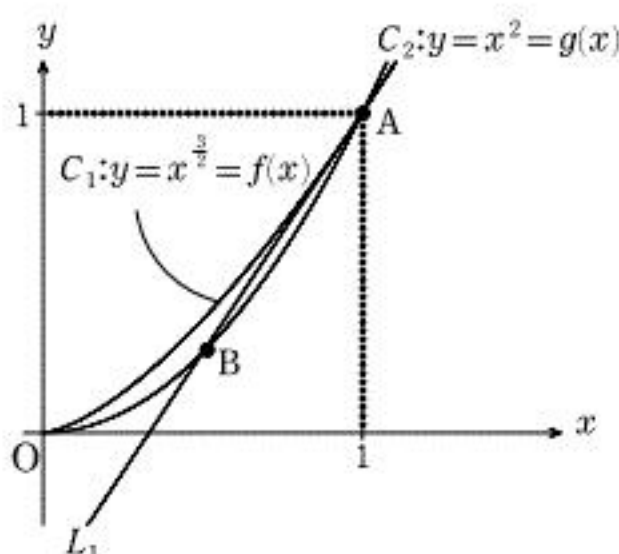
$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{i}{n}\right)^n \right) = \frac{1}{2} (e^i - e^{-i})$$

$$= i \sin 1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \underline{\sin 1}$$

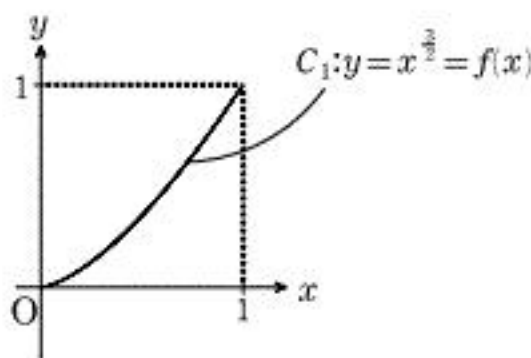


$$\begin{aligned}
 (1) \quad f'(x) &= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \\
 L_1: y-1 &= f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \\
 \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} &= x^2 \Leftrightarrow (2x-1)(x-1)=0 \\
 \therefore x &= 1, \frac{1}{2} \\
 \therefore B &\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \\
 AB &= \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{4}
 \end{aligned}$$



(2) C_1 の $0 \leq x \leq 1$ の部分の長さを L_f とする.

$$\begin{aligned}
 L_f &= \int_0^1 \sqrt{1^2 + (f'(x))^2} dx \\
 &= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx \\
 &= \left[\frac{8}{27} \left(\frac{9}{4}x + 1 \right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{27} (13\sqrt{13} - 8) \dots\dots ①
 \end{aligned}$$



(3) (2)より,

$$L_f = \frac{1}{27} (13\sqrt{13} - 8)$$

また,

$$OA + AB = \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{13}}{4} = \frac{1}{4} (\sqrt{5} + \sqrt{13})$$

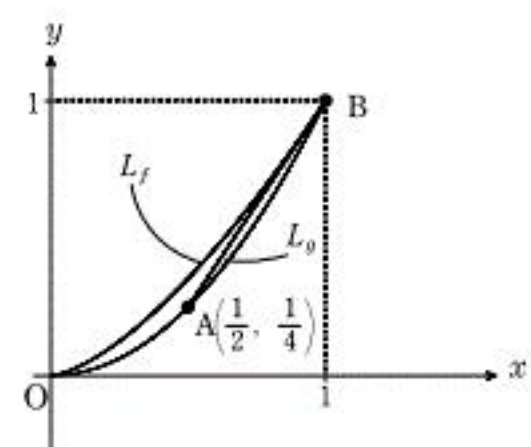
$$\sqrt{5} = 2.236\dots\dots \quad \sqrt{13} = 3.605\dots\dots \text{より,}$$

$$\begin{aligned}
 (OA + AB) - L_f &= \frac{1}{108} (27\sqrt{5} - 25\sqrt{13} + 32) \\
 &> \frac{1}{108} (27 \cdot 2.23 - 25 \cdot 3.61 + 32) > 0 \\
 \therefore OA + AB &> L_f
 \end{aligned}$$

また、図より、 $L_g > OA + AB$ であるから、

$$L_g > OA + AB > L_f$$

$$\therefore \underline{L_g > L_f}$$



(3) <別解>

$$g'(x) = 2x$$

C_2 の $0 \leq x \leq 1$ の部分の長さを L_g とする.

$$\begin{aligned}
 L_g &= \int_0^1 \sqrt{1^2 + (g'(x))^2} dx \\
 &= \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx
 \end{aligned}$$

$2x = \tan \theta$ とする.

$$\begin{aligned}
 L_g &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{2\cos^2 \theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta
 \end{aligned}$$

さらに、 $t = \sin \theta$ とすると、

$$\begin{aligned}
 L_g &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}} \frac{1}{(1-t^2)^2} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right)^2 dt \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}} \left((1-t)^{-2} + (1+t)^{-2} + \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) \right) dt \\
 &= \frac{1}{8} \left[(1-t)^{-1} - (1+t)^{-1} + \log \frac{1+t}{1-t} \right]_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}} \\
 &= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \log(2 + \sqrt{5}) \dots\dots ②
 \end{aligned}$$

①②より,

$$L_f = \frac{1}{27} (13\sqrt{13} - 8) \quad L_g = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \log(2 + \sqrt{5})$$

問題文より,

$$\begin{aligned}
 \sqrt{13} &= 3.605\dots\dots < 3.606 \\
 \therefore L_f &< \frac{1}{27} (13 \cdot 3.606 - 8) < 1.44 \dots\dots ③
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{5} &= 2.236\dots\dots > 2.236 \\
 \therefore L_g &> \frac{2.236}{2} + \frac{1}{4} \log(2 + 2.236) \\
 &> 1.118 + \frac{1}{4} \log e^{\frac{4}{3}} \\
 &= 1.118 + \frac{1}{3} > 1.448 \dots\dots ④
 \end{aligned}$$

$$\left(\because e^4 < (2.8)^4 < 61.5 \text{ より, } 4.236 > e^{\frac{4}{3}} \right)$$

③④より,

$L_f < L_g$ となる。(証明終わり)

