

$$(1) \quad \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(2) \quad (a, b, n) = \underline{(17, 2, 6)} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(3) \quad P(x) = \underline{3x} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(4) \quad m = \underline{4} \quad \dots\dots(\text{答})$$

2

「ある整数 k が存在して $a_k \left(\frac{i}{n} \right) = 0$ 」となるのは,

$\frac{i}{n}$ が $\frac{l}{2^m}$ (l は 1 以上 $2^m - 1$ 以下の整数, m は正の整数) の形に約分できるとき ……①

(1) $n=12$ ($12=2^2 \cdot 3$)

$$\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \frac{5}{12}, \frac{6}{12}, \frac{7}{12}, \frac{8}{12}, \frac{9}{12}, \frac{10}{12}, \frac{11}{12}$$

$$\frac{1}{2^2} \qquad \frac{2}{2^2} \qquad \frac{3}{2^2}$$

$$S_{12} = \left\{ \frac{3}{12}, \frac{6}{12}, \frac{9}{12} \right\} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) 2 の累乗のうち, 2018 以下で最大のものは $2^{10} = 1024$

$$\frac{1}{1024}, \frac{2}{1024}, \dots\dots, \frac{1023}{1024} \quad \dots\dots 1023 \text{ 個} \quad \dots\dots ②$$

の全ては①にあてはまる.

・ $n \leq 1023$ のとき

①にあてはまる数は, ②の中に含まれる.

・ $1025 \leq n \leq 2018$ のとき

$2018 < 2^{11} = 2048$ より, ②以外の $\frac{l}{2^m}$ 型の数は現れない.

よって, T の要素の個数は 1023 個 ……(答)

(1)

 $A_n = P_{a_n}$ とする. $(a_n = 1, 2, 3, \dots, 9)$

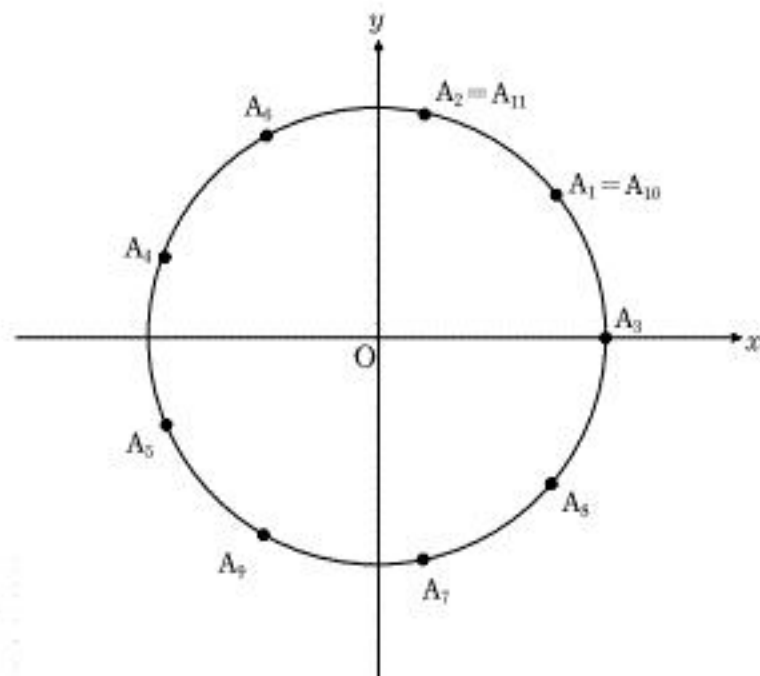
題意より,

$$\frac{a_{n+1} + a_{n+2}}{2} \equiv a_n$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} + a_{n+2} \equiv 2a_n$$

$$\Leftrightarrow a_{n+2} \equiv -a_{n+1} + 2a_n \pmod{9}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
a_n	1	2	9	4	5	3	7	8	6	<u>1</u>	<u>2</u>	9	...



上表より, $\{a_n\}$ は周期 9 で 1~9 がすべて現れる数列となる.

$$\therefore a_{15} = a_6 = 3$$

$$\therefore A_{15} = P_3 \quad \underline{k=3} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) 対称性, 対等性を考えることで, $a_2 - a_1 \equiv \pm 1 \pmod{9}$ のとき
 $A_1 \neq P_1$ であっても(1)と同様に $\{a_n\}$ は「周期 9 で 1~9 を網羅する数列」……①

となる.

$$\cdot a_2 - a_1 \equiv \pm 2 \pmod{9} \text{ のとき, } \begin{array}{c|cccccc} n & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ \hline a_n & 1 & 3 & \underline{8} & 7 & \dots & \end{array}$$

 $a_4 - a_3 = -1$ となるので, $\{a_n\}$ は①となる.

$$\cdot a_2 - a_1 \equiv \pm 3 \pmod{9} \text{ のとき, } \begin{array}{c|cccccccc} n & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ \hline a_n & 1 & 4 & 7 & 1 & 4 & 7 & 1 & \dots \end{array}$$

 $\{a_n\}$ は①とはならない.

$$\cdot a_2 - a_1 \equiv \pm 4 \pmod{9} \text{ のとき, } \begin{array}{c|cccccc} n & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ \hline a_n & 1 & \underline{5} & 6 & \dots & \dots & \end{array}$$

 $a_3 - a_2 = 1$ となるので $\{a_n\}$ は①となる.

以上より, すべての正の整数 n で $A_n \neq P_1$ となるためには $a_2 - a_1 \equiv \pm 3 \pmod{9}$ が必要.

これをみたす (a_1, a_2) の組のうち $\{a_n\}$ に 1 が現れないのは, $\{2, 5, 8\}$ or $\{3, 6, 9\}$ から異なる 2 数 a_1, a_2 をえらんだとき.

$$\therefore {}_3P_2 + {}_3P_2 = \underline{12 \text{ 個}} \quad \dots\dots(\text{答})$$