

$$(1) \quad b \geq \frac{a^2}{6}$$

a, b の出た目の表をかく。

		a					
		1	2	3	4	5	6
b	1	○	○				
	2	○	○	○			
	3	○	○	○	○		
	4	○	○	○	○		
	5	○	○	○	○	○	
	6	○	○	○	○	○	○

求める確率は

$$\frac{\left(a=3 \text{ かつ } b \geq \frac{a^2}{6} \text{ の確率} \right)}{b \geq \frac{a^2}{6} \text{ の確率}} = \underline{\underline{\frac{5}{24}}}$$

$$(2) \quad \sin \frac{b}{4} \pi \neq \cos \frac{a}{4} \pi$$

a, b の出た目の表をかく。

		a					
		1	2	3	4	5	6
b	1	×					
	2						
	3	×					
	4		×				×
	5			×		×	
	6				×		

図の×以外はすべて条件をみたすので

$$1 - \frac{7}{36} = \underline{\underline{\frac{29}{36}}}$$

(3)

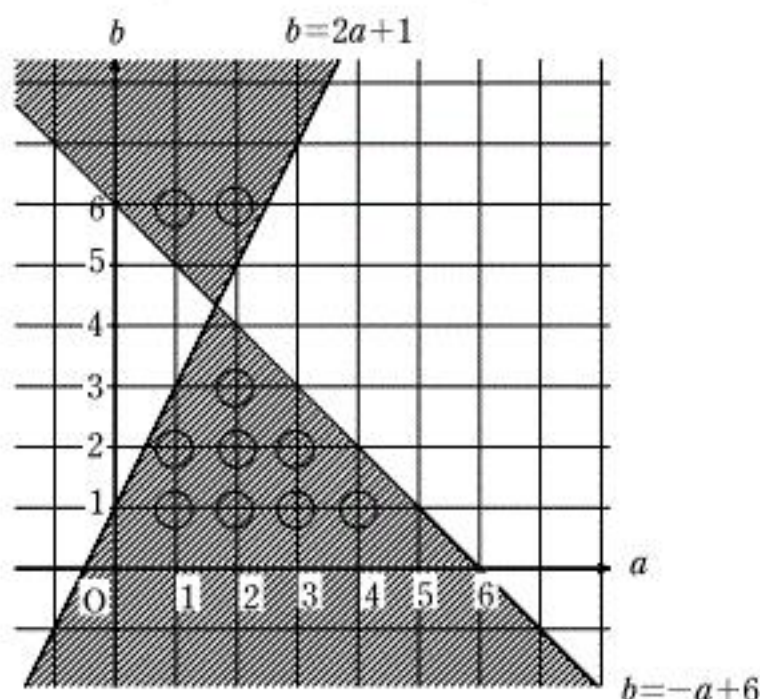
$$b^2 - 7b - ab - 2a^2 + 11a + 6 > 0$$

$$b^2 - (a+7)b - (2a^2 - 11a - 6) > 0$$

$$b^2 - (a+7)b - (a-6)(2a+1) > 0$$

$$\{b + (a-6)\} \{b - (2a+1)\} > 0$$

a, b 直交座標上に領域を図示する。



上図斜線部（境界は含まない）より、 a, b がさいころの目であることに注意すれば

求める確率は

$$\frac{10}{36} = \underline{\underline{\frac{5}{18}}}$$

- (1)
- 3^n
- の一の位の表をかく。

n	1	2	3	4	5	6	
一の位	3	9	7	1	3	9	

循環する

これより, 3^{20} の一の位は 1

- (2)
- 3^n
- が 21 桁となるとき

$$10^{20} \leq 3^n < 10^{21}$$

常用対数をとれば

$$20 \leq n \log_{10} 3 < 21$$

$$\frac{20}{\log_{10} 3} \leq n < \frac{21}{\log_{10} 3}$$

$\log_{10} 3 = 0.4771$ より

$$41 < \frac{20}{\log_{10} 3} \leq n < \frac{21}{\log_{10} 3} < 45$$

n は整数より $n = 42, 43, 44$

(1)より一の位が 7 となるのは n が 4 で割って 3 余る数のときであるから,

求める値は $n =$ 43

- (3)
- N
- が
- n
- 桁で, 最高位が
- a
- のとき

$$a \times 10^{n-1} \leq N < (a+1) \times 10^{n-1}$$

と表せる。

いま, $7^{70} = 10^x$ とすると, 常用対数をとって

$$70 \log_{10} 7 = x$$

$\log_{10} 7 = 0.8451$ より $x = 59.157$

よって

$$\begin{aligned} 7^{70} &= 10^{59.157} \\ &= 10^{0.157} \times 10^{59} \end{aligned}$$

ここで, $10^{0.157}$ について

$$a \leq 10^{0.157} < a+1$$

をみたす 1 桁の整数 a を求める。

$0 < 0.157 < 0.3010$ より

$$\begin{aligned} \log_{10} 1 &< 0.157 < \log_{10} 2 \\ \therefore 10^{\log_{10} 1} &< 10^{0.157} < 10^{\log_{10} 2} \\ \iff 1 &< 10^{0.157} < 2 \\ \therefore a &= 1 \end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned} 1 \times 10^{59} &< 10^{0.157} \times 10^{59} < 2 \times 10^{59} \\ \therefore 1 \times 10^{59} &< 7^{70} < 2 \times 10^{59} \end{aligned}$$

ゆえに, 求める最高位は 1

- (4)
- N
- が
- n
- 桁で上位 2 桁が
- b
- のとき

$$b \times 10^{n-2} \leq N < (b+1) \times 10^{n-2}$$

と表せる。

いま,

$$\begin{aligned} 7^{70} &= 10^{59.157} \\ &= 10^{1.157} \times 10^{58} \end{aligned}$$

ここで, $10^{1.157}$ について

$$b \leq 10^{1.157} < b+1$$

をみたす 2 桁の整数 b を求める。

$1.1461 < 1.157 < 1.1761$ より

$$\begin{aligned} \log_{10} 14 &< 1.157 < \log_{10} 15 \\ \left(\begin{array}{l} \text{※ } \log_{10} 14 = \log_{10} 2 + \log_{10} 7 = 0.3010 + 0.8451 = 1.1461 \\ \log_{10} 15 = \log_{10} 3 + \log_{10} 5 = 0.4771 + 0.6990 = 1.1761 \end{array} \right) \\ \therefore 10^{\log_{10} 14} &< 10^{1.157} < 10^{\log_{10} 15} \\ \iff 14 &< 10^{1.157} < 15 \\ \therefore b &= 14 \end{aligned}$$

以上より

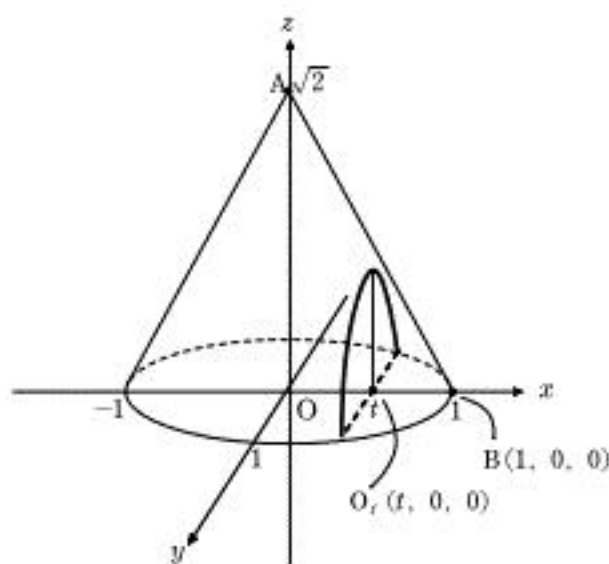
$$\begin{aligned} 14 \times 10^{58} &< 10^{1.157} \times 10^{58} < 15 \times 10^{58} \\ \therefore 14 \times 10^{58} &< 7^{70} < 15 \times 10^{58} \end{aligned}$$

ゆえに, 求める最高位の次の位の数は 4

図形 F は右図の円錐の側面のうち

$x \geq 0, y \geq 0$ の部分である。

太線は、図形 F と平面 $x=t$ の交線である。

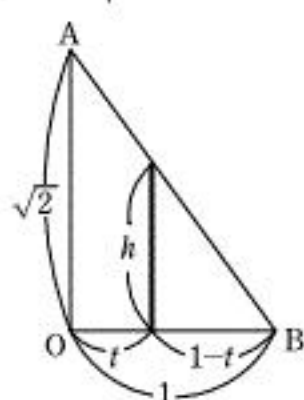


- (1) $x=t$ である点は図の太線で記した部分のうちの $y \geq 0$ の部分である。

相似比から $h = \sqrt{2}(1-t)$

よって、 z のとりうる値は

$$\underline{0 \leq z \leq \sqrt{2}(1-t)}$$



- (2)

$$\begin{aligned} (O_t P_t)^2 &= (t-t)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 \\ &= y^2 + z^2 \end{aligned}$$

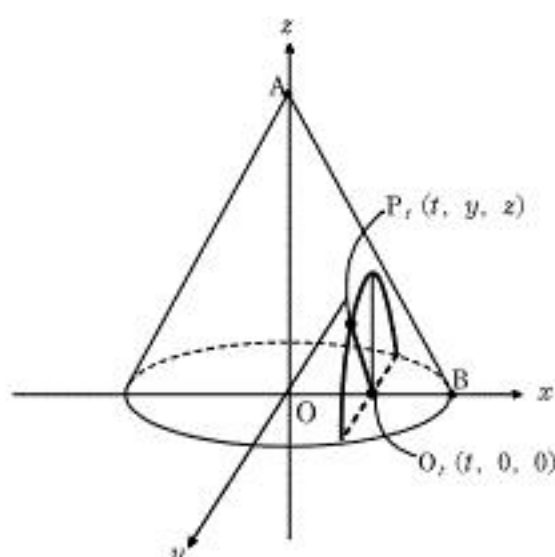
条件式 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}(z - \sqrt{2})^2$ より

$x=t$ のとき

$$\begin{aligned} t^2 + y^2 &= \frac{1}{2}(z - \sqrt{2})^2 \\ \therefore y^2 &= \frac{1}{2}(z - \sqrt{2})^2 - t^2 \end{aligned}$$

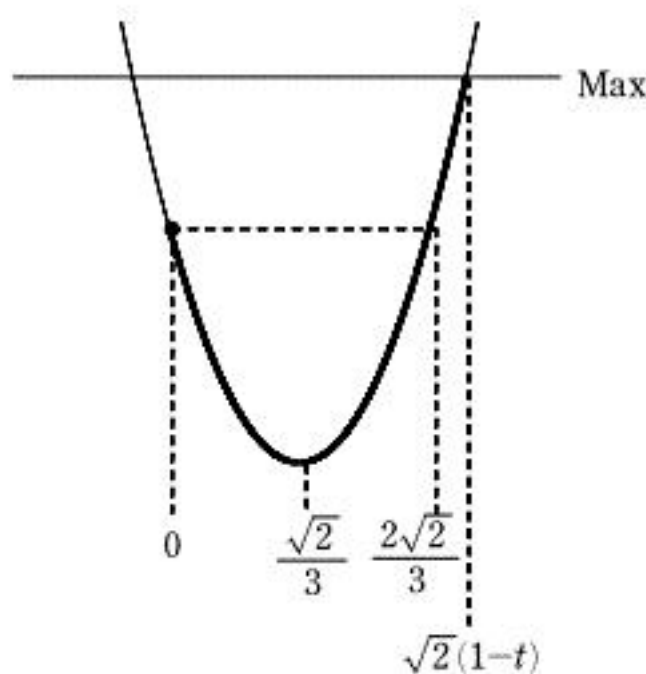
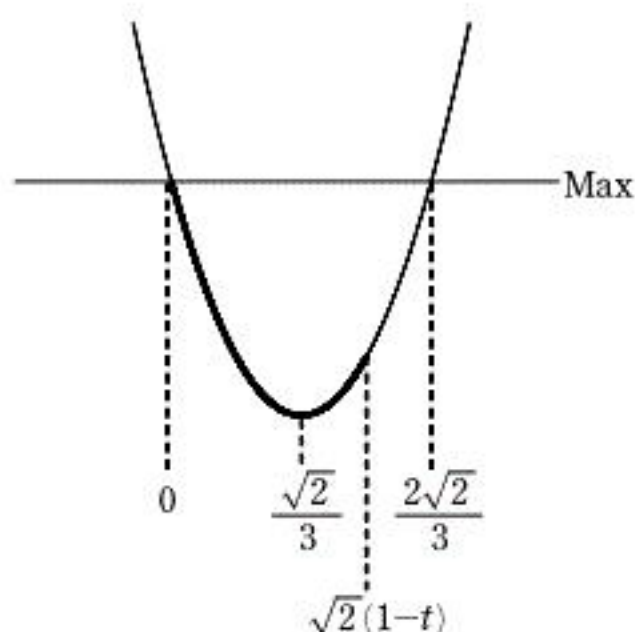
よって

$$\begin{aligned} (O_t P_t)^2 &= \frac{1}{2}(z - \sqrt{2})^2 - t^2 + z^2 \\ &= \underline{\underline{\frac{3}{2}z^2 - \sqrt{2}z + 1 - t^2}} \end{aligned}$$



- (3) $(O_t P_t)^2$ の最大値を求める。

$$\begin{aligned} (O_t P_t)^2 &= \frac{3}{2}z^2 - \sqrt{2}z + 1 - t^2 \\ &= \frac{3}{2}\left(z - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} - t^2 \end{aligned}$$



$0 \leq z \leq \sqrt{2}(1-t)$ であるから $\sqrt{2}(1-t)$ の値により最大値が変わる。

放物線の対称性より

$\sqrt{2}(1-t) < \frac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき 最大値 $1-t^2$ ($z=0$ のとき)

$\sqrt{2}(1-t) \geq \frac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき 最大値 $2(1-t)^2$ ($z=\sqrt{2}(1-t)$ のとき)

ゆえに

$$\begin{cases} \frac{1}{3} < t \leq 1 \text{ のとき} & \text{最大値 } 1-t^2 \\ 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \text{ のとき} & \text{最大値 } 2(1-t)^2 \end{cases}$$