

[1]

(1) $x=p$ は解の一つで、実数解である。よって、複素数平面上の3点 P, A, B が三角形をなすための必要十分条件は、

(i) $x^2+qx+r=0 \quad \cdots \textcircled{1}$

の解 α, β が異なる2つの虚数解である。(①は実数係数なので、 α, β は複素共役である。)

(ii) α, β の実部が p と異なる

の2つの条件が共に成立することである。

(i) について、①の判別式を D とすると、

$$D < 0$$

$$q^2 - 4r < 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

(ii) について、②をみたすとき①の2解は、

$$x = -\frac{q}{2} \pm \frac{\sqrt{4r-q^2}}{2}i \quad \cdots \textcircled{3}$$

よって、

$$-\frac{q}{2} \neq p$$

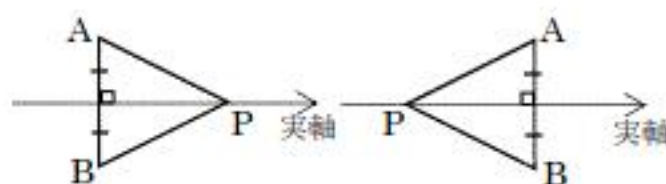
以上より、求める条件は、

$$q^2 - 4r < 0 \quad \text{かつ} \quad 2p+q \neq 0 \quad \cdots \text{答}$$

(2) (1)の条件の下で、三角形 PAB は図のようになり、

その面積は、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4r-q^2} \cdot \left| p - \left(-\frac{q}{2} \right) \right| \\ &= \frac{|2p+q|}{4} \sqrt{4r-q^2} \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$



(3) 三角形 PAB の外接円の中心 Q は、辺 AB の垂直二等分線上にあり、それは実軸に一致する。

よって、 s を実数として、 $Q(s)$ とおける。また、

$$PQ=AQ$$

が成立することから、

$$(p-s)^2 = \left\{ s - \left(-\frac{q}{2} \right) \right\}^2 + \left\{ 0 - \frac{\sqrt{4r-q^2}}{2} \right\}^2$$

$$p^2 - 2ps + s^2 = s^2 + sq + \frac{q^2}{4} + \frac{4r-q^2}{4}$$

$$p^2 - 2ps = sq + r$$

$$s(2p+q) = p^2 - r$$

$$s = \frac{p^2 - r}{2p+q}$$

よって、

$$Q\left(\frac{p^2 - r}{2p+q}\right) \quad \cdots \text{答}$$

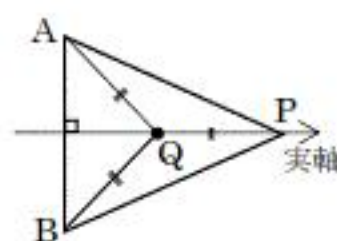
また半径 R は、

$$R = |p-s|$$

$$= \left| p - \frac{p^2 - r}{2p+q} \right|$$

$$= \left| \frac{p(2p+q) - (p^2 - r)}{2p+q} \right|$$

$$= \left| \frac{p^2 + pq + r}{2p+q} \right| \quad \cdots \text{答}$$



$$\ast p^2 + pq + r = \left(p + \frac{q}{2} \right)^2 + \frac{4r-q^2}{4} > 0 \quad ((1) \text{の結果より})$$

であるから、

$$R = \frac{p^2 + pq + r}{|2p+q|}$$

とできる。

[II]

(1)

$$x - y + 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

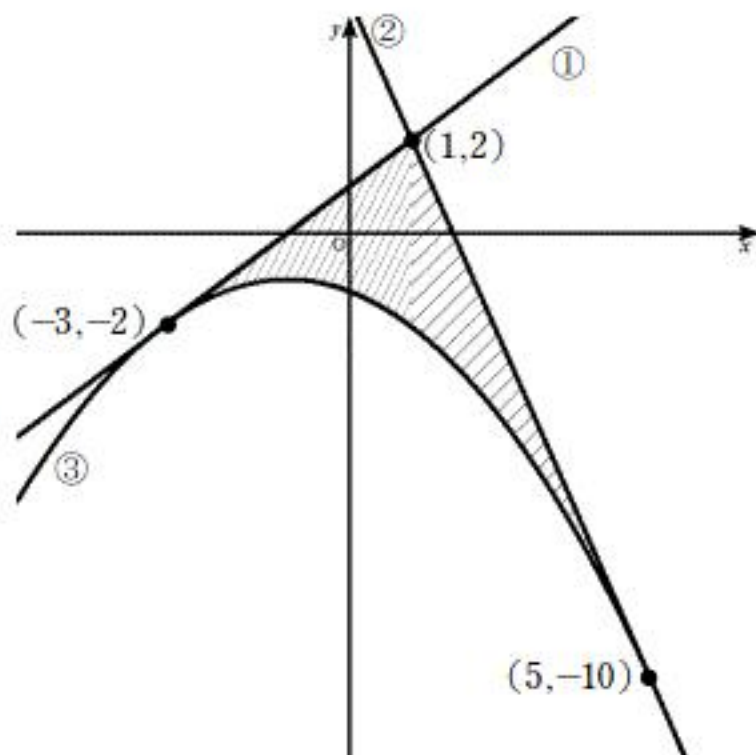
$$3x + y - 5 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$x^2 + 2x + 4y + 5 = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

について、グラフは右図のようになる。

領域を D とし、求める面積を S として、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^1 \left\{ (x+1) - \left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} \right) \right\} dx \\ &\quad + \int_1^5 \left\{ (-3x+5) - \left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} \right) \right\} dx \\ &= \int_{-3}^1 \frac{1}{4}(x+3)^2 dx + \int_1^5 \frac{1}{4}(x-5)^2 dx \\ &= \frac{1}{12} \left[(x+3)^3 \right]_{-3}^1 + \frac{1}{12} \left[(x-5)^3 \right]_1^5 \\ &= \frac{1}{12} \cdot 4^3 + \frac{1}{12} \cdot 4^3 \\ &= \frac{32}{3} \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$



(2) 領域 D の内部領域は、

$$-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} < y < x+1 \quad (-3 < x \leq 1) \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} < y < -3x+5 \quad (1 \leq x < 5) \quad \cdots \textcircled{5}$$

としたとき、④、⑤を満たす点 (x, y) の存在領域の和集合で表せる。④について、

$x = -2$ のとき、 $-\frac{5}{4} < y < -1$ より、これをみたす整数 y は存在しない

$x = -1$ のとき、 $-1 < y < 0$ より、これをみたす整数 y は存在しない

$x = 0$ のとき、 $-\frac{5}{4} < y < 1$ より、これをみたす整数 y は $y = -1, 0$ の 2 個

$x = 1$ のとき、 $-2 < y < 2$ より、これをみたす整数 y は $y = -1, 0, 1$ の 3 個

⑤について、

$x = 2$ のとき、 $-\frac{13}{4} < y < -1$ より、これをみたす整数 y は $y = -3, -2$ の 2 個

$x = 3$ のとき、 $-5 < y < -4$ より、これをみたす整数 y は存在しない

$x = 4$ のとき、 $-\frac{29}{4} < y < -7$ より、これをみたす整数 y は存在しない

以上より、求める個数は、

$$2 + 3 + 2 = 7 \text{ (個)} \quad \cdots \text{答}$$

〔Ⅲ〕

- (1) p が素数のとき、 $\sqrt[3]{p}$ は有理数であると仮定する。このとき、 q, r を互いに素な自然数として、

$$\sqrt[3]{p} = \frac{r}{q}$$

と表せる。両辺を3乗して、

$$p = \frac{r^3}{q^3}$$

$$pq^3 = r^3$$

ここで、 q^3 は r^3 の約数であるが、 q, r は互いに素な自然数なので、 $q^3 = 1$ であるしかない。つまり、

$$q = 1$$

このとき、

$$p = r^3$$

となる。 p は素数なので r^3 も素数でなければならないが、これは不適。(両辺の素数 p の個数の不一致)

以上より p が素数のとき、 $\sqrt[3]{p}$ は無理数である。 …証明終わり

- (2) p は素数、 a, b, c は整数のとき、

$$a(\sqrt[3]{p})^2 + b\sqrt[3]{p} + c = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

ならば、①の両辺に $\sqrt[3]{p}$ をかけることで、

$$ap + b(\sqrt[3]{p})^2 + c\sqrt[3]{p} = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成立する。 …証明終わり

- (3) ②× a −①× b の計算から、

$$\{ap + b(\sqrt[3]{p})^2 + c\sqrt[3]{p}\} \cdot a - \{a(\sqrt[3]{p})^2 + b\sqrt[3]{p} + c\} \cdot b = 0$$

$$a^2p + ab(\sqrt[3]{p})^2 + ac\sqrt[3]{p} - ab(\sqrt[3]{p})^2 - b^2\sqrt[3]{p} - bc = 0$$

$$bc - a^2p + (b^2 - ac)\sqrt[3]{p} = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成立する。 …証明終わり

- (4) (2), (3)より①ならば③が成立する。③のとき、

$$(b^2 - ac)\sqrt[3]{p} = a^2p - bc$$

ここで $b^2 - ac \neq 0$ とすると、

$$\sqrt[3]{p} = \frac{a^2p - bc}{b^2 - ac}$$

となり、左辺は無理数、右辺は有理数なので不適。

よって $b^2 - ac = 0$ である。 …④

このとき③より、

$$bc - a^2p = 0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

が成立する。

ここで、 $ab \neq 0$ とすると、④より $c = \frac{b^2}{a}$ 、⑤より $c = \frac{a^2p}{b}$

よって、

$$\frac{b^2}{a} = \frac{a^2p}{b}$$

$$b^3 = a^3p$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^3 = p$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt[3]{p}$$

左辺は有理数なので、これは(1)により矛盾。よって $ab = 0$ となる。

④、⑤から $a = 0$ のとき $b = 0$ が導かれ、逆に $b = 0$ のとき $a = 0$ が導かれる。

さらに $a = b = 0$ のとき、①より $c = 0$ となる。以上から、

$$a = b = c = 0 \quad \cdots \text{証明終わり}$$

[IV]

$$(1) \quad f'(x) = e^x (\cos x + \sin x) + e^x (-\sin x + \cos x) \\ = 2e^x \cos x \quad \dots \text{答}$$

$$(2) \quad g(x) = e^{-\pi x} \sin \pi x \text{ について、} \\ g'(x) = -\pi e^{-\pi x} \sin \pi x + e^{-\pi x} \cdot \pi \cos \pi x \\ = \pi e^{-\pi x} (\cos \pi x - \sin \pi x) \\ = \sqrt{2} \pi e^{-\pi x} \cos \left(\pi x + \frac{\pi}{4} \right)$$

(i) $g'(x) = 0$ を解く。

$$\cos \left(\pi x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

から

$$\pi x + \frac{\pi}{4} = m\pi + \frac{\pi}{2} \quad (m \text{ は整数})$$

よって、

$$x = m + \frac{1}{4}$$

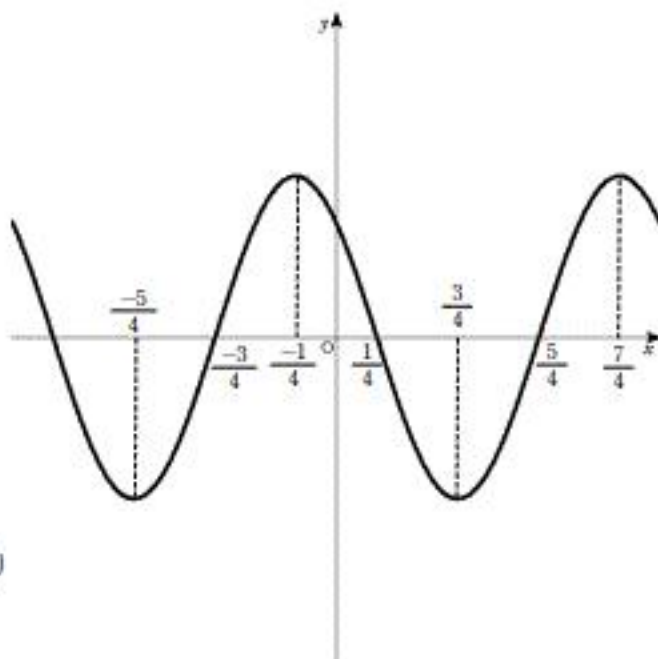
すると、

$$g \left(m + \frac{1}{4} \right) = e^{-\pi \left(m + \frac{1}{4} \right)} \sin \pi \left(m + \frac{1}{4} \right) \\ = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2}} e^{-\pi \left(m + \frac{1}{4} \right)} \quad \dots \text{①}$$

さて、 $y = \cos \left(\pi x + \frac{\pi}{4} \right)$ (周期 2) のグラフ (右図) より

① は極値である。以上から、 m を整数として、

$$\frac{(-1)^m}{\sqrt{2}} e^{-\pi \left(m + \frac{1}{4} \right)} \quad \dots \text{答}$$



※極値を詳細に求めた場合は次のようになる。

m が偶数の場合に①は極大値となり、 $m = 2l$ (l は整数) として、

$$g \left(2l + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\pi \left(2l + \frac{1}{4} \right)}$$

m が奇数の場合に①は極小値となり、 $m = 2l - 1$ (l は整数) として、

$$g \left(2l - 1 + \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\pi \left(2l - \frac{3}{4} \right)}$$

$$(ii) \quad V_n = \pi \int_{n-1}^n \{g(x)\}^2 dx$$

であり、

$$\{g(x)\}^2 = e^{-2\pi x} \sin^2 \pi x \\ = e^{-2\pi x} \frac{1 - \cos 2\pi x}{2} \\ = \frac{1}{2} e^{-2\pi x} - \frac{1}{2} e^{-2\pi x} \cos 2\pi x$$

だから、

$$V_n = \pi \int_{n-1}^n \left(\frac{1}{2} e^{-2\pi x} - \frac{1}{2} e^{-2\pi x} \cos(-2\pi x) \right) dx \\ = \frac{\pi}{2} \int_{n-1}^n e^{-2\pi x} dx - \frac{\pi}{2} \int_{n-1}^n \frac{1}{2} f'(-2\pi x) dx \quad ((1) \text{ より}) \\ = \frac{\pi}{2} \left[\left(-\frac{1}{2\pi} \right) e^{-2\pi x} \right]_{n-1}^n - \frac{\pi}{2} \left[\left(-\frac{1}{4\pi} \right) f(-2\pi x) \right]_{n-1}^n \\ = -\frac{1}{4} (e^{-2\pi n} - e^{-2\pi(n-1)}) + \frac{1}{8} \{ f(-2\pi n) - f(-2\pi(n-1)) \} \\ = -\frac{1}{4} e^{-2\pi n} (1 - e^{2\pi}) + \frac{1}{8} (e^{-2\pi n} \cos(-2\pi n) - e^{-2\pi(n-1)} \cos\{-2\pi(n-1)\}) \\ = -\frac{1}{4} e^{-2\pi n} (1 - e^{2\pi}) + \frac{1}{8} e^{-2\pi n} (1 - e^{2\pi}) \\ = \frac{1}{8} e^{-2\pi n} (e^{2\pi} - 1) \quad \dots \text{答}$$

$$(iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} V_n \\ = \frac{e^{2\pi} - 1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-2\pi})^n \quad (0 < e^{-2\pi} < 1 \text{ なので、収束し和をもつ無限等比級数}) \\ = \frac{e^{2\pi} - 1}{8} \cdot \frac{e^{-2\pi}}{1 - e^{-2\pi}} \\ = \frac{1}{8} \quad \dots \text{答}$$

【V】
(1)

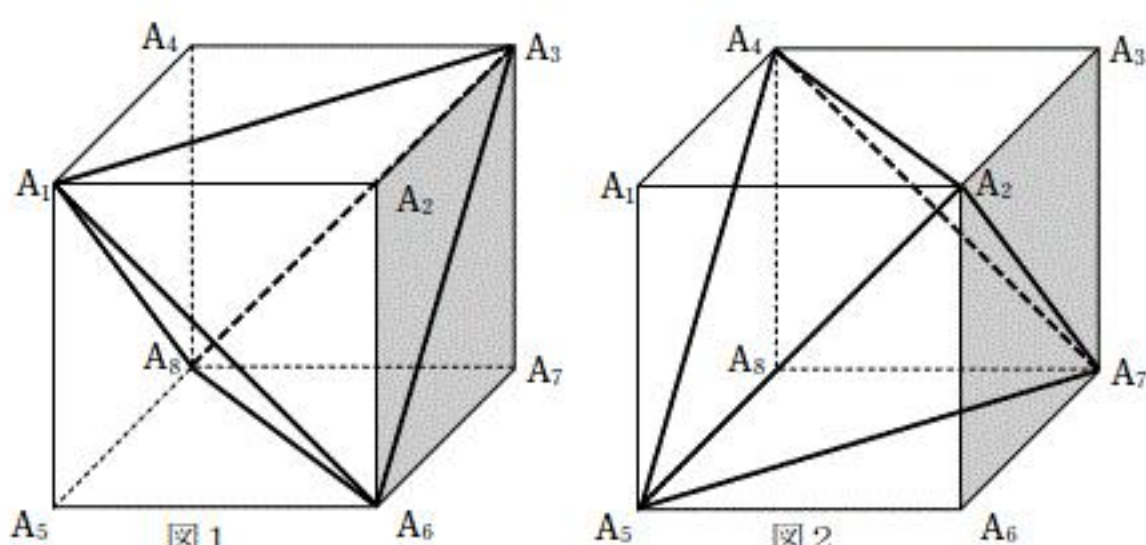
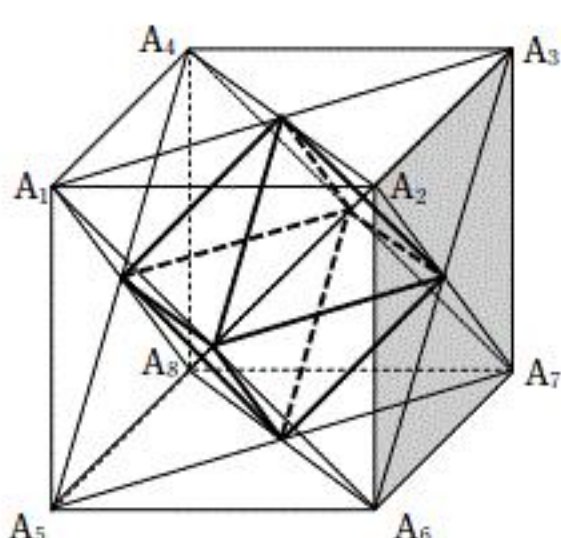


図 1

図 2



正八面体 …答

※ 立方体の全ての面、つまり正方形において、2つの四面体の辺がその中点で交わる。
例えば、図1の四面体Xの辺 A_1A_6 と、図2の四面体Yの辺 A_2A_5 がその中点で交わる。
そして、その交点は正方形 $A_1A_2A_6A_5$ の重心である。同じことが立方体の6面全てで起こる。
その6つの点を結んでできる図形こそがZであり、Zは正八面体である。

(2)

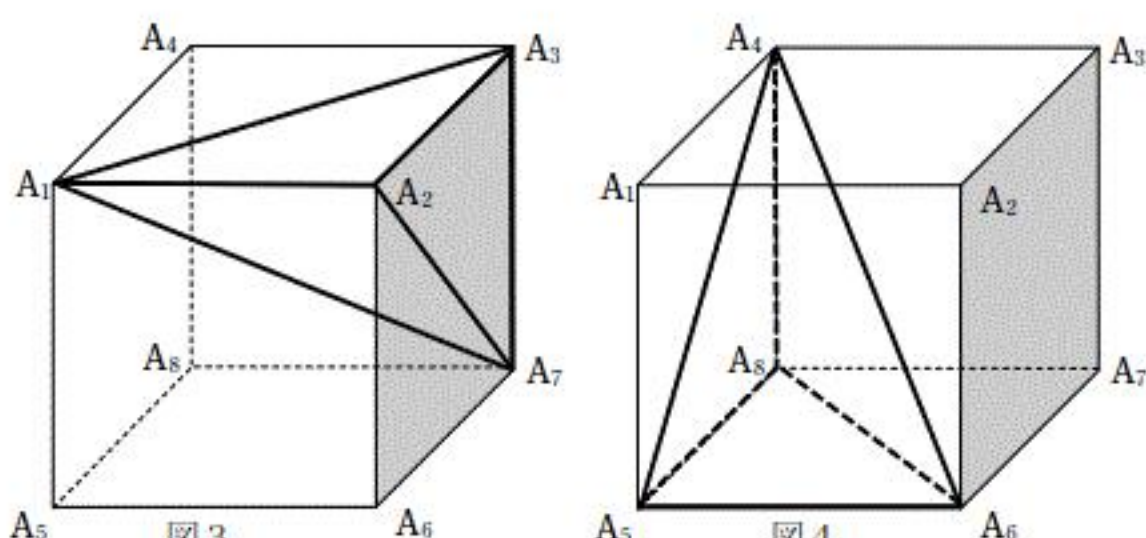
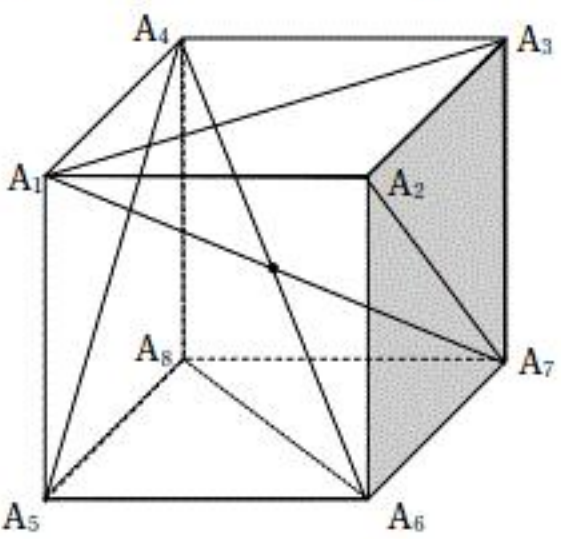


図 3

図 4



点(立方体の重心、中心) …答

※ 四面体Xの辺 A_1A_7 (図3)と、四面体Yの辺 A_4A_6 (図4)が、その中点で交わり、これがZである。

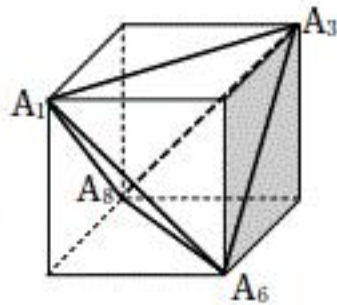
(3) 立方体8つの頂点から無作為に4点を選ぶ方法は ${}_8C_4 = 70$ (通り)あり、これらは同様に確からしい
の中で、ある条件をみたすものが何通りあるのかを数える。

まずはXが、立方体の辺(全部で12本)のうちの何本を含む図形かで場合分けする。

すると、排反な次の4タイプに分かれる。(1本だけ含むもの、5本以上含むものは存在しない)

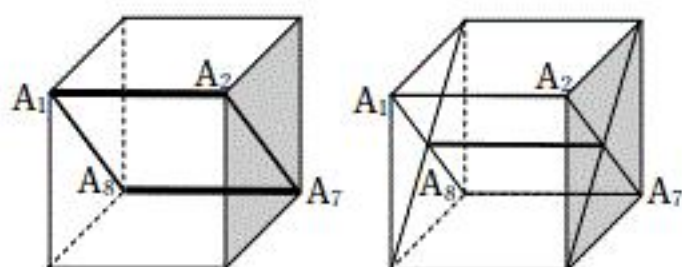
- (ア) 1本も含まない
- (イ) ちょうど2本を含む
- (ウ) ちょうど3本を含む
- (エ) ちょうど4本を含む

(ア)の場合、これは(1)で考えたものと同じタイプのみであり、
XもYも正四面体になり、2通りある。Zは正八面体になる。

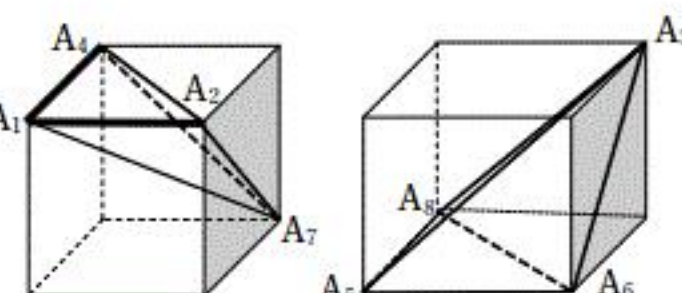


(イ)の場合、さらに位置関係で次の2通りに分類される。

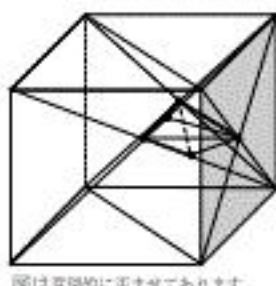
- (あ) 含む2辺が平行になっているもの
Xが右図のように長方形になっているもののみ。
Yも合同な長方形であり、
6通りある。
Zは線分となる。



- (い) (あ)以外のもの
Xが右図のような四面体になっているもののみ。
このときYも合同な四面体になっている。
Zは明らかに立体図形である。 …※
直角をはさむ2辺の選び方が、立方体の
各面で4つずつあるから、
 $4 \times 6 = 24$ (通り)



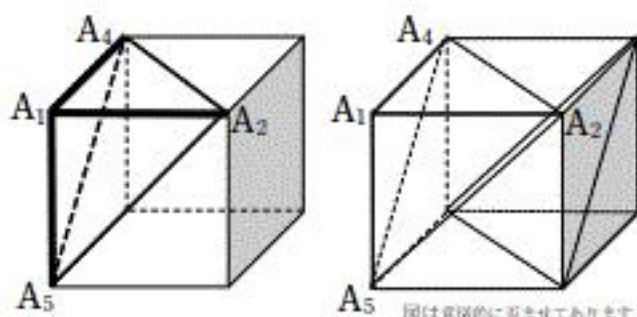
※について、問題はZの形を調べるものではなく、
どのような図形か？がわかれば十分なので、
細かい考察は必要がないであろう。
実際には六面体になっている。
(この考察のほうが問題本体より
大変かもしれない)



図は意図的に歪ませてあります

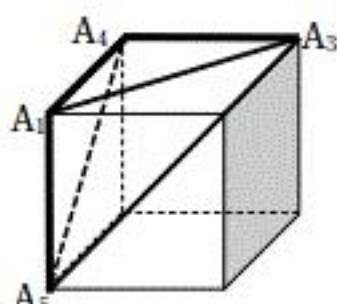
(ウ)の場合、さらに位置関係で次の2通りに分類される。

- (う) 含む3辺が1点を共有するもの
Xが右図のような四面体になっている。
Yも合同な四面体になっているが、
XとYに共通部分はないので、Zは
空集合となる。
直交する3辺が1点で交わる頂点の
選び方から、
8通り

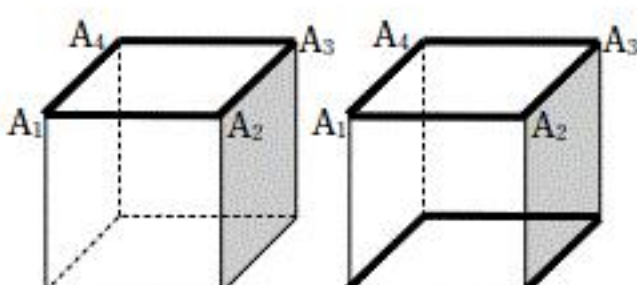


図は意図的に歪ませてあります

- (え) (う)以外のもの
Xが右図のような四面体になっている。
(2)と同じタイプであり、XとYの
共通部分Zは1点になる。
立方体の1つの面(正方形)から3頂点を
選ぶ方法が ${}_4C_3 = 4$ (通り)あるから、
 $4 \times 6 = 24$ (通り)



- (エ)の場合、
Xが立方体の1つの面に一致するときのみ。
YはXと平行な正方形であり、共通部分は
存在しないのでZが空集合である。
6通り。



以上から、求める確率は、

$$\begin{aligned} p &= \frac{8+6}{70} = \frac{1}{5} \\ q_0 &= \frac{24}{70} = \frac{12}{35} \\ q_1 &= \frac{6}{70} = \frac{3}{35} \\ q_2 &= \frac{0}{70} = 0 \\ q_3 &= \frac{2+24}{70} = \frac{13}{35} \quad \dots \text{答} \end{aligned}$$