

問 1

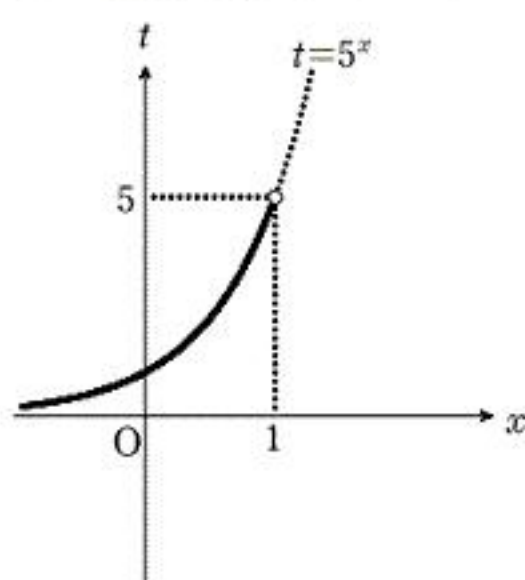
(1) 2 倍角の公式より,

$$\begin{aligned}\tan 2\theta &= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \boxed{\frac{2t}{1-t^2}} \\ \cos 2\theta &= 2\cos^2\theta - 1 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{1+\tan^2\theta} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2}\end{aligned}$$

このとき,

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= \tan 2\theta \cdot \cos 2\theta \\ &= \frac{2t}{1-t^2} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ &= \boxed{\frac{2t}{1+t^2}}\end{aligned}$$

(2) $t=5^x$ とおくと, $x<1$ より, $0<t<5$



このとき,

$$\begin{aligned}y &= 9 \cdot (5^x)^2 - 15(5^x) - (5^x)^3 \\ &= 9t^2 - 15t - t^3\end{aligned}$$

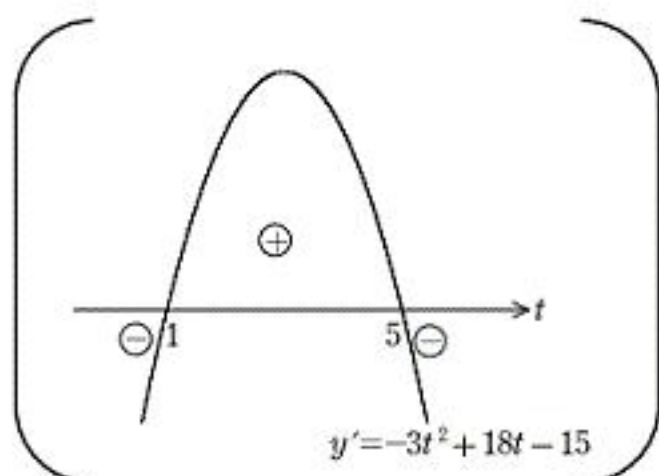
よって,

$$y = -t^3 + 9t^2 - 15t \quad (0 < t < 5)$$

のとりうる値の範囲を求める.

微分して増減表をかく.

$$\begin{aligned}y' &= -3t^2 + 18t - 15 \\ &= -3(t-1)(t-5)\end{aligned}$$



よって, $y'=0$ となるのは,

$$t=1, 5$$

のときである.

増減表	t	0	...	1	...	5	$\left(\begin{array}{l} t=1 \text{ のとき, } y=-7 \\ t=5 \text{ のとき, } y=25 \end{array} \right)$
	y'		-	0	+	0	
	y	0	$\searrow$	-7	$\nearrow$	25	

増減表より,

$$\boxed{-7 \leq y < 25}$$

(3) $\frac{1}{2} / \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} / \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{4} / \frac{1}{5} \cdot \dots$

このように群に分け, 各群の初項について表をかく.

群	1	2	3	...	k
初項	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...	$\frac{1}{k+1}$
項数	1	2	3	...	k
先頭から何番目か	1	2	4	...	$1 + (1+2+\dots+(k-1))$ $= 1 + \frac{1}{2}k(k-1)$

a_{220} が k 群に含まれるとすると, k 群初項は,

$$1 + \frac{1}{2}k(k-1) \text{ 番目}$$

であるから,

$$1 + \frac{1}{2}k(k-1) \leq 220 < 1 + \frac{1}{2}k(k+1)$$

$$\left(k=21 \text{ のとき, } 1 + \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 20 = 211 \text{ より, } 21 \text{ 群の初項は } a_{211} \right)$$

k は整数より, これをみたす値は,

$$k=21$$

21 群の初項は,

$$a_{211} = \frac{1}{22}$$

ゆえに,

$$a_{220} = \boxed{\frac{10}{22}}$$

$$\left(\text{※} 21 \text{ 群は, } \frac{1}{22} \cdot \frac{2}{22} \cdot \frac{3}{22} \dots \text{と続くので, } 21 \text{ 群の } 10 \text{ 番目である } a_{220} = \frac{10}{22} \right)$$

(1) 接点 (t, t^2) とする.

$y' = 2x$ より, $x = t$ のとき,

$$y'_{(t)} = 2t \quad \boxed{\text{傾き}}$$

よって接線は,

$$y = \underbrace{2t}_{\text{傾き}}(x - \underbrace{t}_{\text{点}(t, t^2)}) + \underbrace{t^2}_{\text{点}(t, t^2)}$$

$$\therefore y = 2tx - t^2$$

これが, $P(-2, -5)$ を通るので,

$$-5 = -4t - t^2$$

$$t^2 + 4t - 5 = 0$$

$$(t+5)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -5, 1$$

$t = -5$ のとき,

接点 $(-5, 25)$

接線 $y = -10x - 25$

$t = 1$ のとき,

接点 $(1, 1)$

接線 $y = 2x - 1$

以上より,

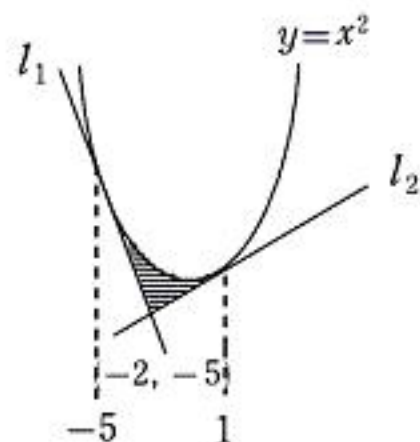
$$\boxed{\begin{cases} l_1: y = -10x - 25 \\ l_2: y = 2x - 1 \end{cases}}$$

(2) (1)より,

$$\boxed{a = -5, b = 1}$$

(3) 右図より, 囲まれる部分の面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 \{x^2 - (2x - 1)\} dx + \int_{-5}^{-2} \{x^2 - (-10x - 25)\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right]_{-2}^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 + 5x^2 + 25x \right]_{-5}^{-2} \\ &= \left(\frac{1}{3} - 1 + 1 \right) - \left(-\frac{8}{3} - 4 - 2 \right) + \left(-\frac{8}{3} + 20 - 50 \right) - \left(-\frac{125}{3} + 1 \right) \\ &= \boxed{18} \end{aligned}$$



点 $P(1, 0)$ とし、単位円周上を反時計回りに点 A や点 B をとり、

それぞれの店の位置を表現しても一般性は失われない、

いま、円周上の点が x 軸方向から反時計回りに角度 θ 進んだ位置であれば、 $[\theta]$ と書くことにする。

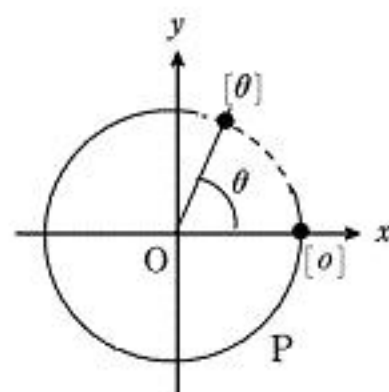
このとき $[o]$ から $[\theta]$ の間にいる客の人数は、

$$(\theta - o) \times 10 \text{ 人}$$

であり、その売り上げは、

$$(\theta - o) \times 10 \text{ 人} \times 1000 \text{ 円}$$

とかける。



(1) A 店は、図の **——** 部の客が購入してくれるので、売り上げは、

$$\left(180 + \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\right) \times 10 \times 1000 = 1800000 \text{ 円}$$

のこりの客は P 店で購入するので、

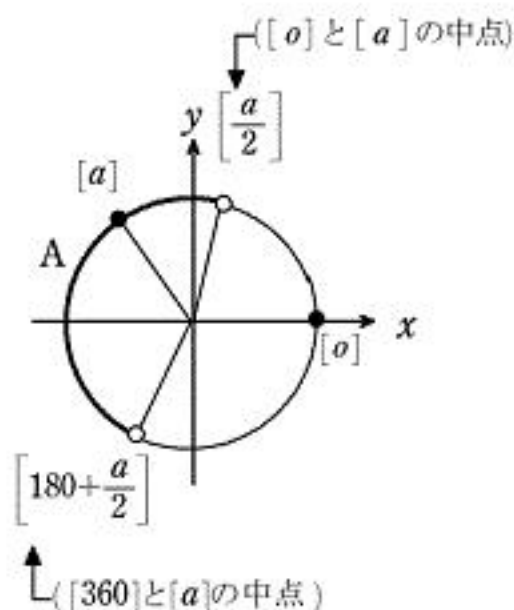
$$[\text{全体}] \quad [\text{A 店}]$$

$$360 \times 10 \times 1000 - 1800000 = 1800000 \text{ 円}$$

以上より、

$$\text{A 店} : 1800000 \text{ 円}$$

$$\text{B 店} : 1800000 \text{ 円}$$



(2)

(i) $a > b$ のとき

同様にして B 店は、図の **---** 部より、

$$\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b}{2}\right) \times 10 \times 1000$$

$$= 5000a \text{ 円}$$

A 店は図の **——** 部より、

$$\left(180 + \frac{a}{2} - \frac{a+b}{2}\right) \times 10 \times 1000$$

$$= 1800000 - 5000b \text{ 円}$$

(ii) $b > a$ のとき

B 店は、図の **----** 部より、

$$\left(180 + \frac{b}{2} - \frac{a+b}{2}\right) \times 10 \times 1000$$

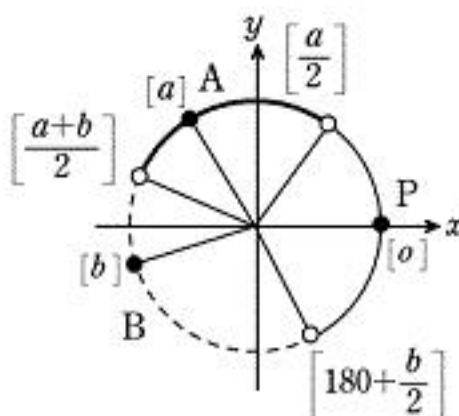
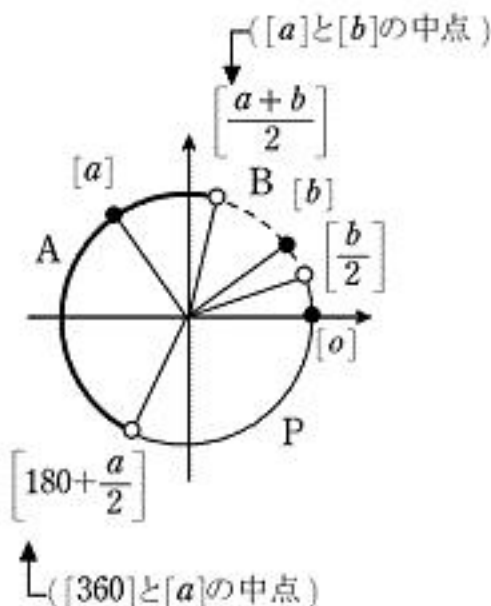
$$= 1800000 - 5000a \text{ 円}$$

A 店は図の **——** 部より、

$$\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a}{2}\right) \times 10 \times 1000$$

$$= 5000b \text{ 円}$$

以上より、



$a > b$ のとき	$\begin{cases} \text{A 店} : 1800000 - 5000b \text{ 円} \\ \text{B 店} : 5000a \text{ 円} \end{cases}$
$b > a$ のとき	$\begin{cases} \text{A 店} : 5000b \text{ 円} \\ \text{B 店} : 1800000 - 5000a \text{ 円} \end{cases}$

$a < 180$ より、つねに $1800000 - 5000a > 5000a$ が言えるので、B 店の売上が最大となる条件は、

$$\boxed{a < b < 360}$$

(3) B 店の売上がつねに 100 万円未満となればよい、

$$1800000 - 5000a < 1000000$$

$$800 < 5a$$

$$160 < a$$

$a < 180$ より、

$$\boxed{160 < a < 180}$$

(4) A 店と B 店の売上合計は、

$$\begin{cases} a > b \text{ のとき } 1800000 + 5000(a - b) \text{ 円} \\ b > a \text{ のとき } 1800000 + 5000(b - a) \text{ 円} \end{cases}$$

$1 \leq a < 180, 1 \leq b < 360$ より、これが最大となるのは、

$$a=1, b=359$$

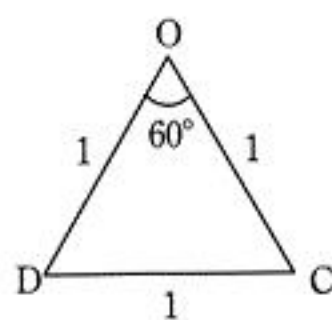
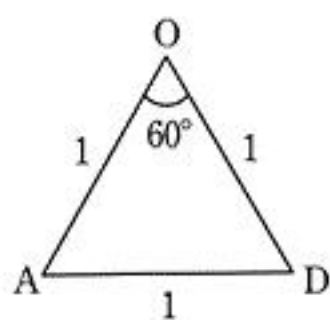
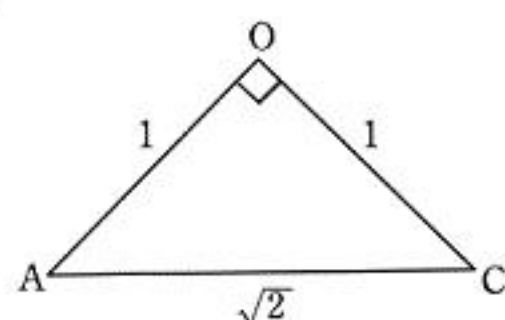
のときである。このとき最大値は、

$$1800000 + 5000 \times 358$$

$$= 3590000 \text{ 円}$$

$$\boxed{a=1, b=359}$$

(1)



図より,

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{d} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

よって,

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \quad \vec{a} \cdot \vec{d} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \frac{1}{2}}$$

(2) 始点を O に変換すると,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

$$= \boxed{(1-y)\vec{c} + y\vec{d} - x\vec{a}}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{※ Q は CD を } y:1-y \text{ に内分する点} \\ \text{P は OA を } x:1-x \text{ に内分する点 より} \end{array} \right]$$

(3)

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}|^2 &= |(1-y)\vec{c} + y\vec{d} - x\vec{a}|^2 \\ &= (1-y)^2|\vec{c}|^2 + y^2|\vec{d}|^2 + x^2|\vec{a}|^2 + 2(1-y) \cdot y \cdot \vec{c} \cdot \vec{d} - 2xy \cdot \vec{a} \cdot \vec{d} - 2x(1-y)\vec{a} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{c}|^2 = |\vec{d}|^2 = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 0, \quad \vec{a} \cdot \vec{d} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \frac{1}{2} \quad \text{より,}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}|^2 &= (1-y)^2 + y^2 + x^2 + (1-y) \cdot y - xy \\ &= \boxed{x^2 - yx + y^2 - y + 1} \end{aligned}$$

(4) 平方完成すると,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}|^2 &= \underbrace{\left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}y^2 + y^2 - y + 1}_{=} \\ &= \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 - y + 1 \\ &= \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1 \\ &= \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

 x, y は実数より, $|\overrightarrow{PQ}|^2$ は,

$$x - \frac{1}{2}y = 0 \quad \text{かつ} \quad y - \frac{2}{3} = 0$$

のとき,

$$\text{最小値 } \frac{2}{3}$$

をとるとわかる.

以上より, $|\overrightarrow{PQ}|$ の最大値は,

$$\boxed{\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

このとき,

$$\boxed{x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}}$$

これは確かに問題を満たしている.

(点 P, Q は辺上にあるので, $0 \leq x, y \leq 1$ という条件がついている.)

(1) $ax^2 + bx + c = 0$ についての解と係数の関係から、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{cases}$$

いま、 a, c はサイコロの目より、

$$\frac{c}{a} > 0$$

よって、目の出方によらず、

$$\alpha\beta > 0$$

である。ゆえに、

$$\alpha\beta \leq 0$$

となることはなく、その確率は、

$$\boxed{0}$$

(2) (1)から、目の出方によらず、

$$\alpha\beta > 0$$

であるから、異なる2実解をもつ確率を求めればよい。

判別式 $D > 0$ であればよい。よって、

$$b^2 - 4ac > 0$$

b の値によって分類する。

(i) $b = 1$ のとき

$1^2 - 4ac > 0$ をみたす a, c は存在しない。

(ii) $b = 2$ のとき

$2^2 - 4ac > 0$ をみたす a, c は存在しない。

(iii) $b = 3$ のとき

$3^2 - 4ac > 0$ より、

$$\frac{9}{4} > ac$$

a, c は整数であるから、

$$ac = 1, 2$$

その組合せは

$(1, 1) (1, 2) (2, 1)$ の 3通り。

(iv) $b = 4$ のとき

$4^2 - 4ac > 0$ より、

$$4 > ac$$

a, c は整数であるから、

$$ac = 1, 2, 3$$

$ac = 3$ となる組合せは、

$$(1, 3) (3, 1)$$

であるから、(iii)と合わせて、

5通り。

(v) $b = 5$ のとき

$5^2 - 4ac > 0$ より、

$$\frac{25}{4} > ac$$

a, c は整数より、

$$a, c = 1, 2, \dots, 6$$

$ac = 4, 5, 6$ となる組合せは

$$(1, 4) (2, 2) (4, 1)$$

$$(1, 5) (5, 1)$$

$$(1, 6) (2, 3) (3, 2) (6, 1)$$

であるから、(iv)と合わせて、

14通り。

(vi) $b = 6$ のとき

$6^2 - 4ac > 0$ より、

$$9 > ac$$

a, c は整数より、

$$a, c = 1, 2, \dots, 8$$

$ac = 7, 8$ となる組合せは、

$$(2, 4) (4, 2)$$

であるから、(v)と合わせて、

16通り。

以上より、求める確率は、

$$\begin{aligned} \frac{3+5+14+16}{6^3} &= \frac{38}{216} \\ &= \boxed{\frac{19}{108}} \end{aligned}$$

(3) 判別式 $D < 0$ であればよい。

(2)より、 $D > 0$ となる確率は、 $\frac{38}{216}$

$D = 0$ となる確率を求めればよい。

b の値によって分類する。

(i) $b = 1$ のとき

$1^2 - 4ac = 0$ より、不適。

(ii) $b = 2$ のとき

$2^2 - 4ac = 0$ より、

$$ac = 1$$

これをみたす a, c の組合せは

$(1, 1)$ の 1通り。

(iii) $b = 3$ のとき

$3^2 - 4ac = 0$ より、不適。

(iv) $b = 4$ のとき

$4^2 - 4ac = 0$ より、

$$ac = 4$$

これをみたす a, c の組合せは

$(1, 4) (2, 2) (4, 1)$ の 3通り。

(v) $b = 5$ のとき

$5^2 - 4ac = 0$ より、不適。

(vi) $b = 6$ のとき

$6^2 - 4ac = 0$ より、

$$ac = 9$$

これをみたす a, c の組合せは、

$(3, 3)$ の 1通り。

よって、 $D = 0$ となる確率は、

$$\frac{1+3+1}{6^3} = \frac{5}{216}$$

以上より、 $D < 0$ となる確率は

$$1 - \frac{38}{216} - \frac{5}{216} = \boxed{\frac{173}{216}}$$

[※(全体) - ($D > 0$ となる確率) - ($D = 0$ となる確率)]