

1

(1) $y = x^2$ について $y' = 2x$

よって $y = x^2$ 上の点 (a, a^2) における接線の方程式は、

$$y = 2a(x - a) + a^2$$

$$= 2ax - a^2$$

よって、

$$x^3 - ax = 2ax - a^2$$

つまり、

$$x^3 - 3ax + a^2 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が異なる実数解を 3 つもつための a の条件を求めればよい。

①の左辺を $f(x)$ とおいて、

$y = f(x)$ のグラフが x 軸と異なる 3 点を共有するための条件を求める。

$$f'(x) = 3x^2 - 3a$$

$$= 3(x^2 - a)$$

なので $a > 0$ ($f(x)$ が極値を持つこと)が必要であり、このとき、

$$f'(x) = 3(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a})$$

だから、 $f(x)$ の増減は右ようになる。よって、

$$f(-\sqrt{a})f(\sqrt{a}) < 0$$

が成立することが必要十分である。

$$(a^2 + 2a\sqrt{a})(a^2 - 2a\sqrt{a}) < 0$$

$$a^3(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 2) < 0$$

$$0 < \sqrt{a} < 2$$

$$0 < a < 4 \quad \cdots \text{答}$$

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

(2) 求める体積を V とすると、

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{2}{\pi} x \right)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x - \frac{4}{\pi} x \sin x + \frac{4}{\pi^2} x^2 \right) dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{4}{\pi^2} x^2 \right) dx - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + \frac{4}{3\pi^2} x^3 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 4 \left[x(-\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) dx$$

$$= \pi \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi \right) + \frac{4}{3\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 \right\} - 4 \left\{ 0 + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \right\}$$

$$= \frac{5}{12} \pi^2 - 4 \quad \cdots \text{答}$$

(3) i^k は $k = 1, 2, 3, 4, \cdots$ のとき $i, -1, -i, 1$ を繰り返す。また、数列 $\{a_n\}$ は自然数列である。さて、与えられた漸化式を繰り返し用いることで、

$$a_{n+6} = a_{n+4} + a_{n+5}$$

$$= a_{n+4} + (a_{n+4} + a_{n+3})$$

$$= a_{n+3} + 2a_{n+4}$$

$$= a_{n+3} + 2(a_{n+3} + a_{n+2})$$

$$= 2a_{n+2} + 3a_{n+3}$$

$$= 2a_{n+2} + 3(a_{n+2} + a_{n+1})$$

$$= 3a_{n+1} + 5a_{n+2}$$

$$= 3a_{n+1} + 5(a_{n+1} + a_n)$$

$$= 5a_n + 8a_{n+1}$$

が成立する。よって、

$$a_{n+6} \equiv a_n \pmod{4}$$

であり、この結果と、

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 3, \quad a_5 = 5, \quad a_6 = 8$$

とで、 a_n を 4 で割った余りは、

$$1, 1, 2, 3, 1, 0$$

を繰り返すことがわかる。よって、

$$2019 = 6 \cdot 336 + 3$$

とで、

$$\sum_{k=1}^{2019} i^{a_k} = 336(i^1 + i^1 + i^2 + i^3 + i^1 + i^0) + i^1 + i^1 + i^2$$

$$= 336(i + i - 1 - i + i + 1) + 2i - 1$$

$$= 674i - 1 \quad \cdots \text{答}$$

$$(4) \quad \left| z - \frac{1}{4}a \right| = \frac{1}{2}|z - a|$$

$$\Leftrightarrow 2 \left| z - \frac{1}{4}a \right| = |z - a|$$

$$\Leftrightarrow 4 \left(z - \frac{1}{4}a \right) \left(\bar{z} - \frac{1}{4}\bar{a} \right) = (z - a)(\bar{z} - \bar{a})$$

$$\Leftrightarrow 4 \left(z\bar{z} - \frac{1}{4}az - \frac{1}{4}a\bar{z} + \frac{1}{16}a^2 \right) = z\bar{z} - az - a\bar{z} + a^2$$

$$\Leftrightarrow 3z\bar{z} = \frac{3}{4}a^2$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = \frac{1}{4}a^2$$

$$\Leftrightarrow |z| = \frac{1}{2}a \quad \cdots \textcircled{1}$$

ここで $1 - z = w$ とおく。 $z = 1 - w$ を①へ代入すると、

$$|1 - w| = \frac{1}{2}a$$

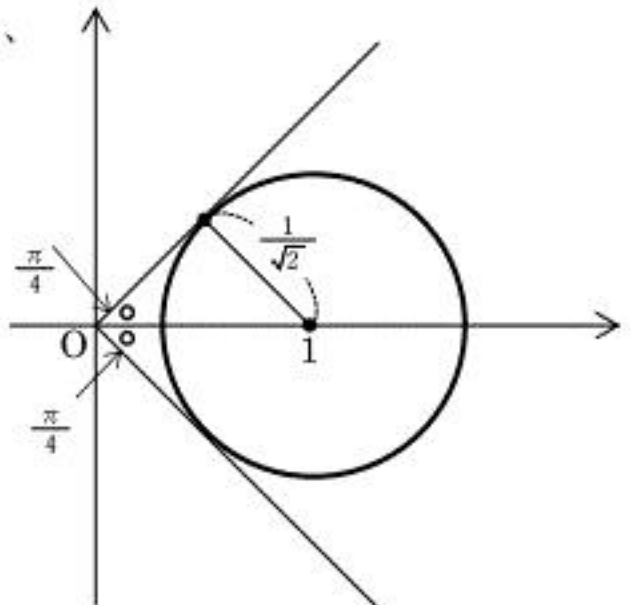
$$|w - 1| = \frac{1}{2}a$$

よって w は複素数平面で点 1 を中心とする半径 $\frac{1}{2}a$ の円を描く。

これが $|\arg w| \leq \frac{\pi}{4}$ を満たす領域に含まれるための必要十分条件を求めると、

$$\frac{1}{2}a \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a \leq \sqrt{2} \quad \cdots \text{答}$$



2

(1) n 回サイコロを投げた後にコインが表を向いている確率を p_n とする。このとき、

$$p_0 = 1$$

であり、

$$p_{n+1} = p_n \cdot \frac{4}{6} + (1 - p_n) \cdot \frac{2}{6} \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす。

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow p_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \left(p_n - \frac{1}{2} \right)$$

より数列 $\left\{ p_n - \frac{1}{2} \right\}$ は公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列なので、

$$p_n - \frac{1}{2} = \left(p_0 - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

$$p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

$$p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n \quad \cdots \text{答}$$

(2) n 回サイコロを投げた後にコインが頂点 A にある確率を q_n とする。このとき、 $q_0 = 1$ であり、 $n+1$ 回サイコロを投げた後にコインが頂点 A にあるのは、

(i) n 回サイコロを投げた後にコインが頂点 A におかれており、

かつ $n+1$ 回目にコインを裏返すとき

(ii) n 回サイコロを投げた後にコインが頂点 A 以外におかれており、

かつ $n+1$ 回目にコインを頂点 A に移動するとき

のみであり、(i) と (ii) は排反、さらにコインが頂点 B、頂点 C にある確率は等しいので、

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n \cdot \frac{1}{3} + (1 - q_n) \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

が成立する。よって、

$$q_0 = 1, \quad q_n = \frac{1}{3} (n \geq 1)$$

である。ここで、

$n+1$ 回のサイコロを投げた後に、コインが頂点 A の上に表向きにおかれていたのは、

(i) n 回のサイコロを投げた後に、コインが頂点 A の上に裏向きにおかれており、

かつ、 $n+1$ 回目にコインを裏返すとき

(ii) n 回のサイコロを投げた後に、コインが頂点 B または頂点 C の上に表向きにおかれており、

かつ、 $n+1$ 回目にコインが頂点 A に移動するとき

のみであり、(i) と (ii) は排反、さらにコインが頂点 B、頂点 C にある確率は等しいので、

$$a_{n+1} = (q_n - a_n) \cdot \frac{1}{3} + (p_n - a_n) \cdot \frac{1}{3}$$

が成立する。これで $n=10$ とすると、

$$\begin{aligned} a_{11} &= (q_{10} - a_{10}) \cdot \frac{1}{3} + (p_{10} - a_{10}) \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} p_{10} + \frac{1}{3} q_{10} - \frac{2}{3} a_{10} \end{aligned}$$

となり、これに

$$p_{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^{10}, \quad q_{10} = \frac{1}{3}, \quad a_{10} = \frac{1}{6} + \frac{683}{2 \times 3^{10}}$$

を代入することで、

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^{10} \right\} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{6} + \frac{683}{2 \cdot 3^{10}} \right) \\ &= \frac{1}{6} - \frac{455}{2 \cdot 3^{10}} \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

[3]

(1) k を自然数として、
 $k < x < k+1$ のとき、

$$\frac{1}{k+1} < \frac{1}{x} < \frac{1}{k}$$

だから、

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx$$

より、

$$\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx < \frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{k+1} < \log(k+1) - \log k < \frac{1}{k} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立する。すると、①の中辺、最右辺により、

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} \{\log(k+1) - \log k\} < \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{1}{k}$$

$$\log(m+n) - \log m < \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{1}{k}$$

$$\log\left(1 + \frac{n}{m}\right) < \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{1}{k} \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成立する。また、①の最左辺、中辺により、

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{1}{k+1} < \sum_{k=m}^{m+n-1} \{\log(k+1) - \log k\}$$

$$\sum_{k=m+1}^{m+n} \frac{1}{k} < \log(m+n) - \log m$$

$$-\frac{1}{m} + \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{m+n} < \log\left(1 + \frac{n}{m}\right)$$

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{1}{k} < \log\left(1 + \frac{n}{m}\right) + \frac{1}{m} - \frac{1}{m+n}$$

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{1}{k} < \log\left(1 + \frac{n}{m}\right) + \frac{n}{m(m+n)} \quad \cdots \textcircled{3}$$

②、③より不等式は示せた。 …証明終わり

$$(2) \quad \frac{1}{(2n+k)(n+1-k)} = \frac{1}{3n+1} \left(\frac{1}{n+1-k} + \frac{1}{2n+k} \right)$$

と変形できるから、

$$a_n = \frac{1}{3n+1} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=2n+1}^{3n} \frac{1}{k} \right)$$

と表せる。

そこで、(1)で示した不等式で $m=1$ としたもの、 $m=2n+1$ としたものを考えると、

$$\log(1+n) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < \log(1+n) + \frac{n}{n+1} \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\log\left(1 + \frac{n}{2n+1}\right) < \sum_{k=2n+1}^{3n} \frac{1}{k} < \log\left(1 + \frac{n}{2n+1}\right) + \frac{n}{(2n+1)(3n+1)} \quad \cdots \textcircled{5}$$

となり、

$$\frac{1}{3n+1} \left\{ \log(1+n) + \log\left(1 + \frac{n}{2n+1}\right) \right\}$$

$$< a_n$$

$$< \frac{1}{3n+1} \left\{ \log(1+n) + \log\left(1 + \frac{n}{2n+1}\right) + \frac{n}{n+1} + \frac{n}{(2n+1)(3n+1)} \right\}$$

が成立する。したがって、 $c_n = \log(1+n) + \log\left(1 + \frac{n}{2n+1}\right)$ とおくと、

$$\frac{c_n}{3n+1} < a_n < \frac{c_n}{3n+1} + \frac{1}{3n+1} \left\{ \frac{n}{n+1} + \frac{n}{(2n+1)(3n+1)} \right\}$$

であり、 $b_n = \frac{\log n}{n} > 0$ ($n \geq 2$) より、

$$\frac{n}{3n+1} \cdot \frac{c_n}{\log n} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{n}{3n+1} \cdot \frac{c_n}{\log n} + \frac{n}{3n+1} \cdot \frac{\frac{n}{n+1} + \frac{n}{(2n+1)(3n+1)}}{\log n}$$

を満たす。さて、

$$\frac{c_n}{\log n} = \frac{\log(1+n) + \log\left(1 + \frac{n}{2n+1}\right)}{\log n}$$

$$= \frac{\log(1+n)}{\log n} + \frac{\log\left(1 + \frac{n}{2n+1}\right)}{\log n}$$

$$= \frac{\log n + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log n} + \frac{\log\left(1 + \frac{n}{2n+1}\right)}{\log n} \quad \left(n+1 = n\left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ の変形より} \right)$$

$$= 1 + \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log n} + \frac{\log\left(1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{n}}\right)}{\log n}$$

だから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{\log n} = 1 + 0 + 0 = 1$$

よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+1} \cdot \frac{c_n}{\log n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 + \frac{1}{n}} \cdot \frac{c_n}{\log n}$$

$$= \frac{1}{3+0} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{3n+1} \cdot \frac{c_n}{\log n} + \frac{n}{3n+1} \cdot \frac{\frac{n}{n+1} + \frac{n}{(2n+1)(3n+1)}}{\log n} \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{3n+1} \cdot \frac{c_n}{\log n} + \frac{1}{3 + \frac{1}{n}} \cdot \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{\frac{1}{n}}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(3 + \frac{1}{n}\right)}}{\log n} \right\}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3+0} \cdot 0$$

$$= \frac{1}{3}$$

以上よりはさみうちの原理から、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{3} \quad \cdots \text{答}$$