

1

(1) $P=2\cos\alpha\sin\beta+3\sin\alpha\sin\beta+4\cos\beta$ とおくと、

$$\begin{aligned} P &= (2\cos\alpha+3\sin\alpha)\sin\beta+4\cos\beta \\ &= \sqrt{(2\cos\alpha+3\sin\alpha)^2+4^2} \sin(\beta+\gamma) \\ &= \sqrt{13\cos^2(\alpha+\delta)+16} \sin(\beta+\gamma) \\ &\geq \sqrt{13\cdot 1^2+16} \cdot (-1) \\ &= -\sqrt{29} \end{aligned}$$

が成立する。等号について、

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \sin\beta = -\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{29}}, \quad \cos\beta = -\frac{4}{\sqrt{29}}$$

などで成立する。以上より求める最小値は $-\sqrt{29}$ …答

(2) $f(x)=x^2+a$ のとき、 $f(x)=y$ とおくと、

$f(f(x))=x$ は、 $f(y)=x$ と表せる。よって、

$$y=x^2+a \quad \cdots \textcircled{1}, \quad x=y^2+a \quad \cdots \textcircled{2}$$

を満たす実数 x, y の組で、異なるものがちょうど 2 個存在するための a の条件を求めればよい。

①−②から、

$$\begin{aligned} y-x &= x^2-y^2 \\ (y-x)(1+y+x) &= 0 \end{aligned}$$

より $y=x$ または $y=-x-1$ である。よって、

$$\textcircled{1} \text{ かつ } y=x \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \text{ かつ } y=-x-1 \quad \cdots \textcircled{4}$$

について、『③または④』を満たす実数 x, y の組で、異なるものがちょうど 2 個存在するための a の条件を求めればよい。③と④の共通解について、

$$x=-x-1$$

より $x=-\frac{1}{2}$ となるから、あるとしても $(x, y)=\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ のみである

またこのとき $a=-\frac{3}{4}$ である。

③について、 y を消去すると

$$x^2-x+a=0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

判別式を D_1 として、 $D_1=1-4a$

④について、 y を消去すると、

$$x^2+x+a+1=0 \quad \cdots \textcircled{6}$$

判別式を D_2 として、 $D_2=-3-4a$

したがって、

$$-\frac{3}{4} \leq a < \frac{1}{4} \quad \cdots \text{答}$$

a	$\cdots$	$-\frac{3}{4}$	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
D_1	+	+	+	0	−
D_2	+	0	−	−	−

(3) $\int_1^x P(t)dt=Q(x)$ とおくと $Q(x)$ も x の整式である。

$$xQ(x)=(x-2)Q(x+1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$Q(1)=0, \quad Q(2)=0 \quad \cdots \textcircled{2} \quad (\textcircled{1} \text{ より})$$

$$Q'(x)=P(x) \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成立する。①で $x=n$ (n は整数) とすると、

$$nQ(n)=(n-2)Q(n+1)$$

が成立。このとき $n \geq 3$ で、

$$\frac{Q(n)}{(n-1)(n-2)} = \frac{Q(n+1)}{n(n-1)}$$

が成立するから、数列 $\left\{ \frac{Q(n)}{(n-1)(n-2)} \right\}$ は定数数列なので、

$$\frac{Q(n)}{(n-1)(n-2)} = \frac{Q(3)}{(3-1)(3-2)} = \frac{Q(3)}{2}$$

が成立し、

$$Q(n) = \frac{Q(3)}{2} (n-1)(n-2)$$

を満たす。これは②より $n \geq 1$ で成立する。ここで、

$$F(x) = Q(x) - \frac{Q(3)}{2} (x-1)(x-2)$$

を考えると $F(x)$ は x の整式であり、 n を 3 以上の整数とすると、

$$F(n) = Q(n) - \frac{Q(3)}{2} (n-1)(n-2) = 0$$

となり $F(x)$ は無数の異なる値で 0 となり、 $F(x)$ が整式であることと合わせて、

$$F(x) = 0$$

である。したがって、

$$Q(x) = \frac{Q(3)}{2} (x-1)(x-2)$$

と表せる。ここで $\frac{Q(3)}{2} = q$ とおくと $Q(x) = q(x^2-3x+2)$ であり、③より、

$$P(x) = Q'(x) = q(2x-3)$$

$x=1$ とすると、

$$P(1) = q(2\cdot 1-3) = 1$$

より $q=-1$

以上から、

$$P(x) = -2x+3 \quad \cdots \text{答}$$

(4) $P=(5+2\sqrt{5})^{2019}$, $Q=(5-2\sqrt{5})^{2019}$

とする。このとき、

$$0 < 5-2\sqrt{5} < 1$$

だから $0 < Q < 1$ である。さて、

$$\begin{aligned} P+Q &= (5+2\sqrt{5})^{2019} + (5-2\sqrt{5})^{2019} \\ &= 2 \Big({}_{2019}C_0 5^{2019} + {}_{2019}C_2 5^{2017} (2\sqrt{5})^2 + {}_{2019}C_4 5^{2015} (2\sqrt{5})^4 + \cdots \\ &\quad \cdots + {}_{2019}C_{2016} 5^3 (2\sqrt{5})^{2016} + {}_{2019}C_{2018} 5^1 (2\sqrt{5})^{2018} \Big) \\ &= 2 \cdot 5^{2019} + {}_{2019}C_2 \cdot 2^3 \cdot 5^{2018} + {}_{2019}C_4 \cdot 2^5 \cdot 5^{2017} + \cdots \\ &\quad \cdots + {}_{2019}C_{2016} \cdot 2^{2017} \cdot 5^{1011} + {}_{2019}C_{2018} \cdot 2^{2019} \cdot 5^{1010} \\ &= 2 \cdot 5^{2019} + 100 \Big({}_{2019}C_2 \cdot 2^1 \cdot 5^{2016} + {}_{2019}C_4 \cdot 2^3 \cdot 5^{2015} + \cdots \\ &\quad \cdots + {}_{2019}C_{2016} \cdot 2^{2015} \cdot 5^{1009} + {}_{2019}C_{2018} \cdot 2^{2017} \cdot 5^{1008} \Big) \end{aligned}$$

より $P+Q$ は自然数であり、 $P+Q$ を 100 で割った余りは $2 \cdot 5^{2019}$ を 100 で割った余りに等しい。

さて、 $2 \cdot 5^{2019} = 10 \cdot 5^{2018}$ なので、これを 100 で割った余りは 50 である。

すると、

$$P = (P+Q) - Q$$

について、 $0 < Q < 1$ であるから、 P の整数部分の下 2 桁は 49 である。よって、

$$n \text{ を } 100 \text{ で割った余りは } 49 \quad \cdots \text{答}$$

2

放物線 $y = x^2$ を C , 円 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$ を D ,
直線 $y = x - 4$ を l とする。

(1) 円 D の中心 $(3, 1)$ と直線 l の距離を d とすると、

$$d = \frac{|3 - 1 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

右図のように Q , R が決まるとき、 QR は最小となる。
よって、 QR の最小値は、

$$d - \text{『円 } D \text{ の半径』} = \sqrt{2} - 1 \quad \cdots \text{答}$$

(2) 直線 l に関して D と対称な円 D' を考えると、

$$D': (x-5)^2 + (y+1)^2 = 1$$

となる。

このとき、 D 上の任意の点 Q , l 上の任意の点 R に対して、

$$QR = Q'R$$

となる点 Q' が円 D' 上に存在し、 Q と Q' は l に関して対称にとれる。

よって、

$$PR + QR = PR + Q'R \geq PQ' \quad (\text{等号は 3 点 } P, R, Q' \text{ が一直線上に並ぶときに成立})$$

が成立する。以下、 PQ' が最小となる場合を考察する。

円 D' の中心 $(5, -1)$ と C 上の点 (t, t^2) の距離を h として、

$$\begin{aligned} h^2 &= (t-5)^2 + (t^2+1)^2 \\ &= t^4 + 3t^2 - 10t + 26 \end{aligned}$$

これを $f(t)$ とおくと、

$$\begin{aligned} f'(t) &= 4t^3 + 6t - 10 \\ &= 2(t-1)(2t^2 + 2t + 5) \end{aligned}$$

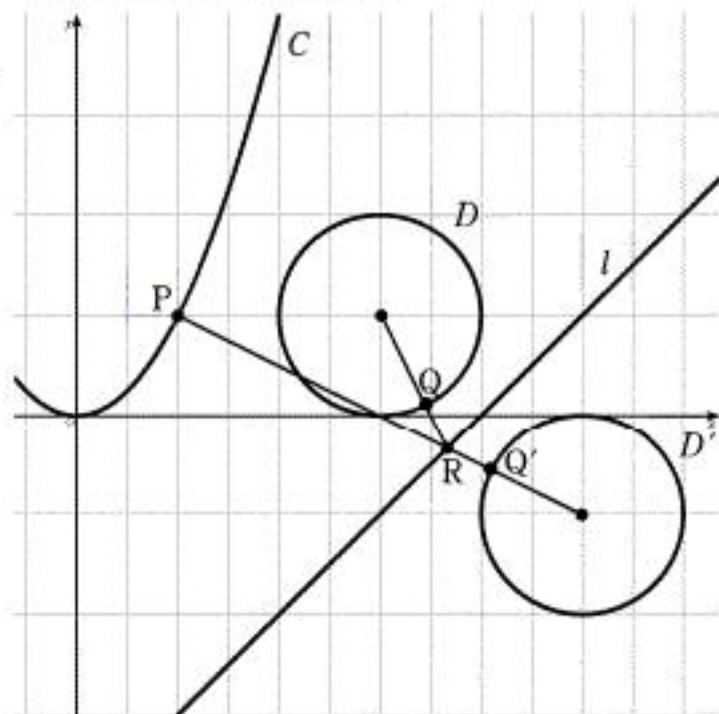
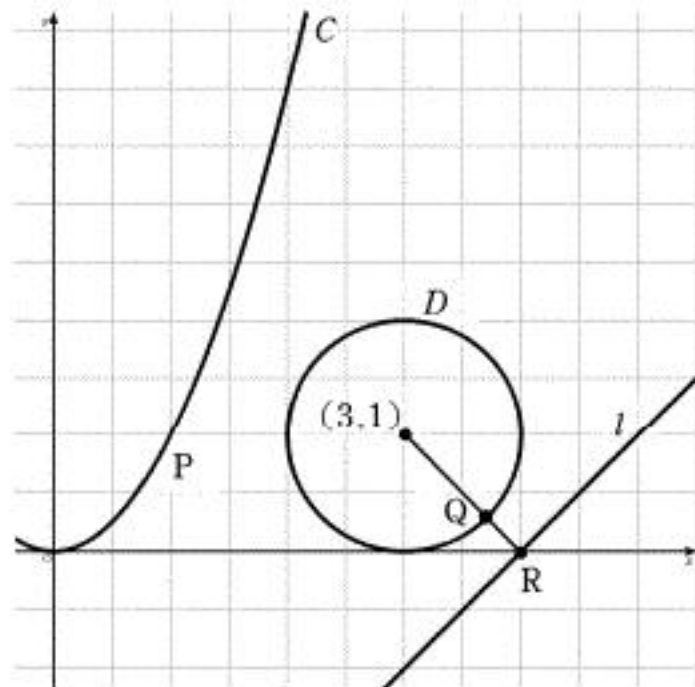
から関数 $f(t)$ の増減は下のようになり、

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	20	$\nearrow$

$f(t)$ は $t=1$ で極小かつ最小となる。

したがって求める最小値は、

$$\sqrt{20} - 1 = 2\sqrt{5} - 1 \quad \cdots \text{答}$$



3

(1) 条件(ii)より、

$$a_4 - 4^2 = 5M \quad (M \text{ は整数})$$

と表せる。よって、

$$a_4 = 5(M+3) + 1$$

より a_4 を 5 で割った余りは 1 である。 …答

(2) $a_n = 2021$ となる正の整数 n を求める。

条件(ii)により、

$$a_n \equiv n^2 \pmod{5}$$

が成立する。また、 k を整数として、

$$(5k)^2 = 25k^2, \quad (5k \pm 1)^2 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1, \quad (5k \pm 2)^2 = 5(5k^2 \pm 4k) + 4$$

よって、 $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ のとき、 n^2 を 5 で割った余りは 1, 4, 4, 1, 0 を繰り返す。

つまり、 a_n を 5 で割った余りも 1, 4, 4, 1, 0 を繰り返す。

この結果と条件(i)より、 $a_1 = 1$ をスタートとして、 $n \geq 2$ のときの各 a_n を、考えうる最小の自然数となるように構成してみる。すると、はじめの 10 項は次のようになる。

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 9, \quad a_4 = 11, \quad a_5 = 15, \\ a_6 &= 16, \quad a_7 = 19, \quad a_8 = 24, \quad a_9 = 26, \quad a_{10} = 30 \end{aligned}$$

よって、 l を正の整数として、

$$a_{5l-4} = 15l - 14, \quad a_{5l-3} = 15l - 11, \quad a_{5l-2} = 15l - 6, \quad a_{5l-1} = 15l - 4, \quad a_{5l} = 15l$$

と表せる。このとき、

$$a_{2019} = a_{5 \cdot 404 - 1} = 15 \cdot 404 - 4 = 6056$$

となり、条件(iii)に一致する。したがって、

$$a_n = 2021$$

となるのは、

$$2021 = 15 \cdot 135 - 4$$

から、

$$n = 5 \cdot 135 - 1 = 674 \quad \dots \text{答}$$