

1

(1) 平方完成すると、

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + x + (2k+1)y + k^2 + 1 &= 0 \\
 \underbrace{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \underbrace{\left(y + \frac{2k+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2k+1}{2}\right)^2} + k^2 + 1 &= 0 \\
 \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{2k+1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4} + \left(\frac{2k+1}{2}\right)^2 - k^2 - 1 \\
 &= k - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

これが円(点を含む)を表すためには、

$$k - \frac{1}{2} \geq 0 \text{ より, } \boxed{k \geq \frac{1}{2}}$$

(2) k について降巾の順に並べると、

$$k^2 + 2yk + (x^2 + y^2 + x + y + 1) = 0$$

この k の 2 次方程式が実数解をもてばよいので、

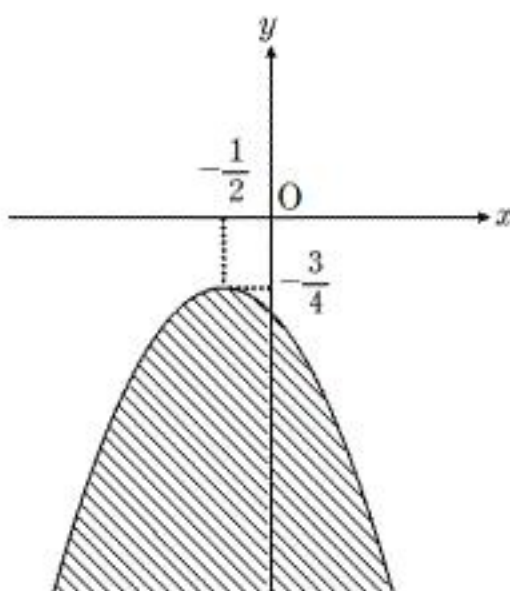
$$\text{判別式 } D \geq 0$$

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{4} &= y^2 - (x^2 + y^2 + x + y + 1) \\
 &= -x^2 - x - y - 1 \geq 0 \\
 \therefore \boxed{y \leq -x^2 - x - 1}
 \end{aligned}$$

図示すれば、

$$\begin{aligned}
 y &\leq -x^2 - x - 1 \\
 &= -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

より、右図斜線部。(境界を含む)



(3) (1)の円は、 $k \geq \frac{1}{2}$ のとき

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{2k+1}{2}\right)^2 = k - \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(2)の境界線は、

$$\text{放物線 } y = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

連立して共有点を調べる。

②より、

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -y - \frac{3}{4}$$

①へ代入すると、

$$\begin{aligned}
 -y - \frac{3}{4} + \left(y + \frac{2k+1}{2}\right)^2 &= k - \frac{1}{2} \\
 y^2 + 2ky + k^2 &= 0
 \end{aligned}$$

$$(y+k)^2 = 0 \text{ より, } y = -k$$

このとき、②より、

$$\begin{aligned}
 \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 &= k - \frac{3}{4} \\
 x + \frac{1}{2} &= \pm \sqrt{k - \frac{3}{4}} \\
 \therefore x &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{k - \frac{3}{4}}
 \end{aligned}$$

よって、連立方程式の解は、

$$\left(-\frac{1}{2} \pm \sqrt{k - \frac{3}{4}}, -k\right)$$

これより、 $k - \frac{3}{4} < 0$ のとき x は虚数となり、共有点が存在しない。

(いいかえれば、 $k - \frac{3}{4} \geq 0$ のとき、共有点が存在する)

よって、共有点をもたない条件は、 $k < \frac{3}{4}$

また、①より、 $k \geq \frac{1}{2}$ であるから、

$$\boxed{\frac{1}{2} \leq k < \frac{3}{4}}$$

(1) 平方完成すると,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 4(x^2 - x \cos \theta) + 3 \sin^2 \theta \\
 &= 4 \left\{ \left(x - \frac{1}{2} \cos \theta \right)^2 - \frac{1}{4} \cos^2 \theta \right\} + 3 \sin^2 \theta \\
 &= 4 \left(x - \frac{1}{2} \cos \theta \right)^2 - \underbrace{\cos^2 \theta}_{1 - \sin^2 \theta} + 3 \sin^2 \theta \\
 &= 4 \left(x - \frac{1}{2} \cos \theta \right)^2 - 1 + 4 \sin^2 \theta
 \end{aligned}$$

よって, 頂点 y 座標

$$a = -1 + 4 \sin^2 \theta$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ において, $0 \leq \sin^2 \theta \leq 1$ より,

$$\boxed{-1 \leq a \leq 3}$$

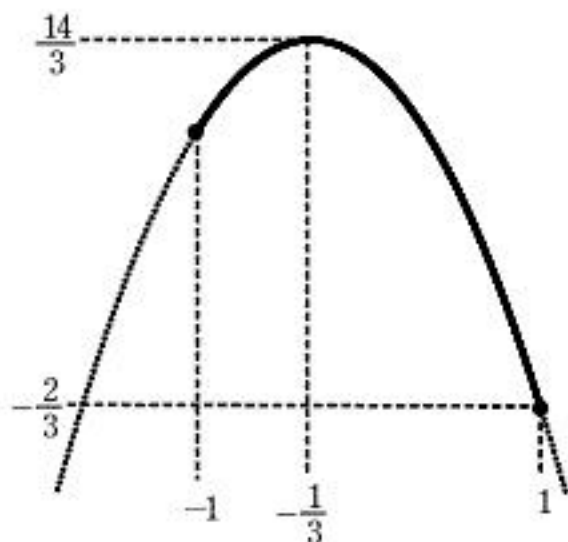
(2) 積分する.

$$\begin{aligned}
 b &= \int_0^1 (4x^2 - 4x \cos \theta + 3 \sin^2 \theta) dx \\
 &= \left[\frac{4}{3} x^3 - 2x^2 \cos \theta + 3 \sin^2 \theta \cdot x \right]_0^1 \\
 &= \frac{4}{3} - 2 \cos \theta + \underbrace{3 \sin^2 \theta}_{1 - \cos^2 \theta} \\
 &= -3 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta + \frac{13}{3}
 \end{aligned}$$

ここで $t = \cos \theta$ とおくと, $(-1 \leq t \leq 1)$

$$\begin{aligned}
 b &= -3t^2 - 2t + \frac{13}{3} \\
 &= -3 \left(t^2 + \frac{2}{3}t \right) + \frac{13}{3} \\
 &= -3 \left\{ \left(t + \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{1}{9} \right\} + \frac{13}{3} \\
 &= -3 \left(t + \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{14}{3}
 \end{aligned}$$

$-1 \leq t \leq 1$ より, 図示すれば,



よって, 求める範囲は,

$$\boxed{-\frac{2}{3} \leq b \leq \frac{14}{3}}$$

(3) 虚数解をもつとき, 判別式 $D < 0$ より,

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{4} &= 4 \underbrace{\cos^2 \theta}_{1 - \sin^2 \theta} - 12 \sin^2 \theta \\
 &= 4 - 16 \sin^2 \theta < 0 \\
 \frac{1}{4} &< \sin^2 \theta \quad \cdots \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

このとき, $f(x) = 0$ の 2 解を α, β とおくと, 解と係数の関係より,

$$c = \alpha\beta = \frac{3}{4} \sin^2 \theta \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より, $\sin^2 \theta \leq 1$ に注意すれば,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} &< \sin^2 \theta \leq 1 \\
 \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} &< \frac{3}{4} \sin^2 \theta \leq \frac{3}{4} \cdot 1 \\
 \therefore \quad \boxed{\frac{3}{16} < c \leq \frac{3}{4}}
 \end{aligned}$$

(1) $X=5$ のとき

① 1回目 5 または ② 1回目偶数で2回目 5

この確率は、

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

よって、求める条件付き確率は、

$$\frac{(\text{1回目が5の確率})}{(X=5の確率)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

(2) $Y=4$ となるためには、 $X=4, 5, 6$ であることが必要。

(i) $X=4$ かつ $Y=4$ のとき

1回目偶数で2回目4のうえで、4回投げて4回とも表であるから、

$$\frac{3}{6} \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{192}$$

(ii) $X=5$ かつ $Y=4$ のとき

1回目5 または 1回目偶数で2回目5のうえで、5回投げて4回表であるから、

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{1}{6}\right) \times {}_5C_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{128}$$

(iii) $X=6$ かつ $Y=4$ のとき

1回目偶数で2回目6のうえで、6回投げて4回表であるから、

$$\frac{3}{6} \times \frac{1}{6} \times {}_6C_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{256}$$

以上から求める確率は、(i) または (ii) または (iii) より、

$$\frac{1}{192} + \frac{5}{128} + \frac{5}{256} = \frac{4+30+15}{64 \times 4 \times 3} = \boxed{\frac{49}{768}}$$

(3) (2)より、求める条件付き確率は、

$$\frac{(X=6 \text{ かつ } Y=4 \text{ の確率})}{(Y=4 \text{ の確率})} = \frac{\frac{5}{256}}{\frac{49}{768}} = \frac{\frac{5}{\cancel{64} \times \cancel{4}}}{\frac{49}{\cancel{64} \times \cancel{4} \times 3}} = \boxed{\frac{15}{49}}$$