

[1]

(*) n^2+1 , $2n^2+3$, $6n^2+5$ がすべて素数である

(1) $n=5k$ (k は自然数) のとき、

$$\begin{aligned}6n^2+5 &= 6(5k)^2+5 \\ &= 5(30k^2+1)\end{aligned}$$

であり、 $30k^2+1 \geq 31$ よりこれは合成数なので(*)を満たさない。 …証明終わり

(2) $n=1$ のとき、

$$n^2+1=2, \quad 2n^2+3=5, \quad 6n^2+5=11$$

$n=2$ のとき、

$$n^2+1=5, \quad 2n^2+3=11, \quad 6n^2+5=29$$

より、確かに(*)は成立する。

以下、 $n \geq 3$ のとき(*)が成立しないことを示す。3以上の自然数はすべて、 m を自然数として、

$$5m-2, \quad 5m-1, \quad 5m, \quad 5m+1, \quad 5m+2$$

のいずれかで表せる。

(i) $n=5m \pm 2$ ($m \geq 1$) のとき、

$$\begin{aligned}n^2+1 &= (5m \pm 2)^2+1 \\ &= 5(5m^2 \pm 4m+1)\end{aligned}$$

であり、 $5m^2-4m+1 \geq 2$, $5m^2+4m+1 \geq 10$ だからこれは合成数である。

(ii) $n=5m \pm 1$ ($m \geq 1$) のとき、

$$\begin{aligned}2n^2+3 &= 2(5m \pm 1)^2+3 \\ &= 5(10m^2 \pm 4m+1)\end{aligned}$$

であり、 $10m^2-4m+1 \geq 7$, $10m^2+4m+1 \geq 15$ だからこれは合成数である。

以上の結果と(1)とで(*)を満たすような n は $n=1, 2$ のみであることが示せた。 …証明終わり

〔Ⅱ〕

(1) P_n の外接円の半径を r とし、その中心を O とする。

P_n の頂点を反時計回りに $A_1, A_2, \dots, A_n$ としたとき、

$$\triangle OA_1 A_2 \equiv \triangle OA_2 A_3 \equiv \dots \equiv \triangle OA_n A_1$$

であり、 P_n の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= n \cdot \triangle OA_1 A_2 \\ &= n \cdot \frac{1}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

が成立する。条件より、

$$S=1$$

なので、

$$\frac{n}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n} = 1$$

から、

$$r^2 = \frac{2}{n \sin \frac{2\pi}{n}} \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす。ここで、

$$A_1 A_2 = 2 \cdot r \sin \frac{\pi}{n}$$

だから、

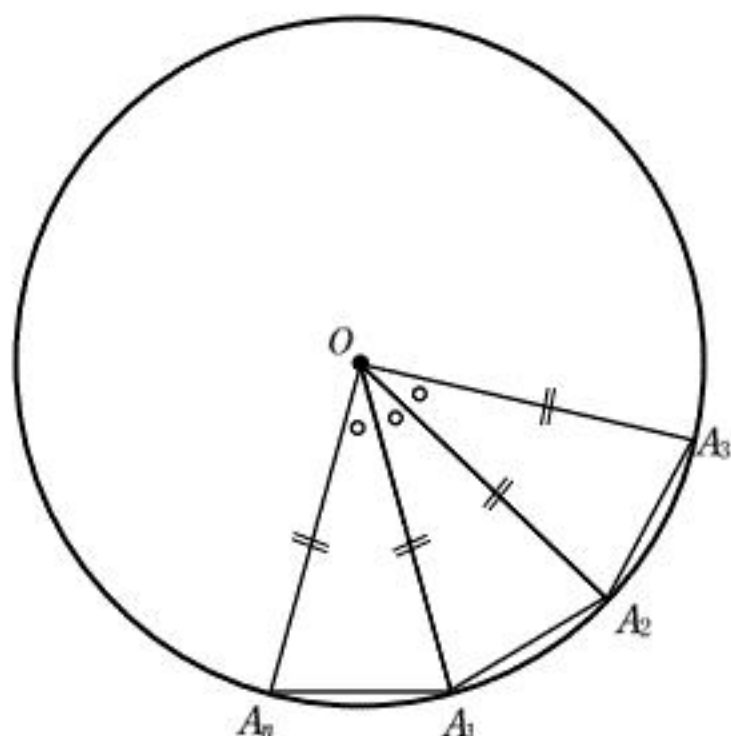
$$L_n = n \cdot 2r \sin \frac{\pi}{n}$$

よって、

$$(L_n)^2 = 4n^2 r^2 \sin^2 \frac{\pi}{n}$$

これに①を代入して r^2 を消去すると、

$$\begin{aligned} (L_n)^2 &= 4n^2 \cdot \frac{2}{n \sin \frac{2\pi}{n}} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{n} \\ &= 8n \cdot \frac{\sin^2 \frac{\pi}{n}}{2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}} \\ &= 4n \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \\ &= 4n \tan \frac{\pi}{n} \quad \dots \text{答} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (2) \quad L_n &= \sqrt{4n \tan \frac{\pi}{n}} \\ &= 2 \sqrt{\frac{\tan \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \pi} \end{aligned}$$

より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = 2\sqrt{1 \cdot \pi} = 2\sqrt{\pi} \quad \dots \text{答}$$

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{x} \tan x \quad \left(0 < x \leq \frac{\pi}{3} \right)$$

を考える。このとき、 $(L_n)^2 = 4\pi f\left(\frac{\pi}{n}\right)$ である。

$$f'(x) = \frac{x - \frac{1}{2} \sin 2x}{x^2 \cos^2 x}$$

であり、 $g(x) = x - \frac{1}{2} \sin 2x$ とおくと、

$$g'(x) = 1 - \cos 2x \geq 0$$

より $g(x)$ は $0 \leq x$ で x の増加関数なので、

$$g(x) \geq g(0) = 0$$

よって、

$$f'(x) \geq 0 \quad \left(0 < x \leq \frac{\pi}{3} \right)$$

より $f(x)$ は $0 < x \leq \frac{\pi}{3}$ において x の増加関数である。すると、

$3 \leq n < k$ のとき、

$$0 < \frac{\pi}{k} < \frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi}{3}$$

だから、

$$f\left(\frac{\pi}{k}\right) < f\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$4\pi f\left(\frac{\pi}{k}\right) < 4\pi f\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$(L_k)^2 < (L_n)^2$$

$$(L_n)^2 > (L_k)^2 \quad \dots \text{証明終わり}$$

[III]

$$(1) \quad \frac{1}{\sin \frac{1}{n}} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{\sin \frac{1}{n}} \right\rfloor \leq \frac{1}{\sin \frac{1}{n}} \text{ だから、}$$

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{n}} - 1 \right) < \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{1}{\sin \frac{1}{n}} \right\rfloor \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{1}{n}}$$

ここで、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\sin \frac{1}{n}} = 1$$

であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{n}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{n}}{\sin \frac{1}{n}} - \frac{1}{n} \right) = 1 - 0 = 1$$

以上から、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{1}{\sin \frac{1}{n}} \right\rfloor = 1 \quad \cdots \text{答}$$

$$(2) \quad \frac{1}{n\sqrt{n}} (1 + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \cdots + [\sqrt{n}])$$

$$= \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n [\sqrt{k}]$$

$$= a_n$$

とおくと、

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k} - 1) < a_n \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$$

を満たす。さて、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \\ &= \int_0^1 \sqrt{x} dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

また、

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k} - 1) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k} - 1) = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

以上から、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3} \quad \cdots \text{答}$$

[IV]

(1) 条件より、

$$\left|\overrightarrow{OA}\right|=1$$

よって、

$$\left|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PO}\right|^2=1$$

$$\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{p}\right|^2=1$$

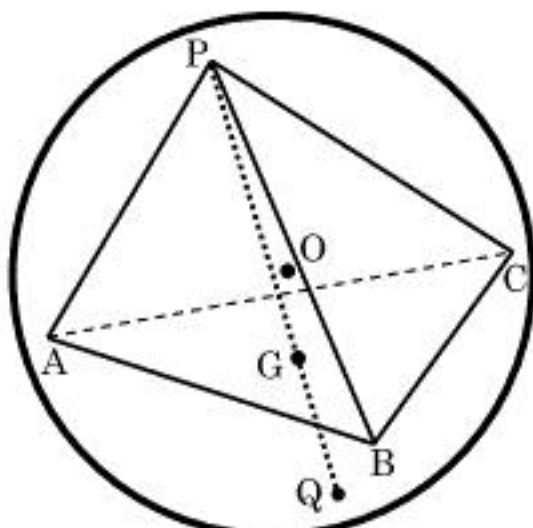
$$\left|\overrightarrow{a}\right|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}+\left|\overrightarrow{p}\right|^2=1$$

ここで $\left|\overrightarrow{PO}\right|=\left|\overrightarrow{p}\right|=1$ なので、 …①

$$\left|\overrightarrow{a}\right|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}+1^2=1$$

$$\left|\overrightarrow{a}\right|^2=2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}$$

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p} \quad \cdots\text{証明終わり}$$



(2) $\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{PG}$ より、

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+k\overrightarrow{PG}$$

ここで $\left|\overrightarrow{OQ}\right|=1$ だから、

$$\left|\overrightarrow{OP}+k\overrightarrow{PG}\right|=1$$

$$\left|\overrightarrow{OP}+k\overrightarrow{PG}\right|^2=1$$

$$\left|\overrightarrow{OP}\right|^2+2k\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PG}+k^2\left|\overrightarrow{PG}\right|^2=1$$

$$1^2+2k\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PG}+k^2\left|\overrightarrow{PG}\right|^2=1 \quad (\because\text{①より})$$

$$k\left(2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PG}+k\left|\overrightarrow{PG}\right|^2\right)=0$$

$k=0$ とすると $P=Q$ となり不適。よって $k\neq 0$ だから、

$$2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PG}+k\left|\overrightarrow{PG}\right|^2=0$$

$\left|\overrightarrow{PG}\right|\neq 0$ だから、

$$k=\frac{2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PG}}{\left|\overrightarrow{PG}\right|^2}$$

さて、

$$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{p}\cdot\frac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{a}+\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{c}\right)$$

ここで(1)と同様の計算により、

$$2\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}, \quad 2\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{c}$$

が成立するから、

$$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PG}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{c}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(\left|\overrightarrow{a}\right|^2+\left|\overrightarrow{b}\right|^2+\left|\overrightarrow{c}\right|^2\right)$$

また、

$$\left|\overrightarrow{PG}\right|^2=\left|\frac{1}{3}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})\right|^2$$

$$=\frac{1}{9}\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right|^2$$

よって、

$$k=\frac{2\cdot\frac{1}{6}\left(\left|\overrightarrow{a}\right|^2+\left|\overrightarrow{b}\right|^2+\left|\overrightarrow{c}\right|^2\right)}{\frac{1}{9}\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right|^2}$$

$$=\frac{3\left(\left|\overrightarrow{a}\right|^2+\left|\overrightarrow{b}\right|^2+\left|\overrightarrow{c}\right|^2\right)}{\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right|^2} \quad \cdots\text{答}$$

(3) $PG:PQ=1:3$ のとき、(2)の設定より

$$k=3$$

なので、

$$\frac{3\left(\left|\overrightarrow{a}\right|^2+\left|\overrightarrow{b}\right|^2+\left|\overrightarrow{c}\right|^2\right)}{\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right|^2}=3$$

$$\left|\overrightarrow{a}\right|^2+\left|\overrightarrow{b}\right|^2+\left|\overrightarrow{c}\right|^2=\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right|^2$$

$$\left|\overrightarrow{a}\right|^2+\left|\overrightarrow{b}\right|^2+\left|\overrightarrow{c}\right|^2=\left|\overrightarrow{a}\right|^2+\left|\overrightarrow{b}\right|^2+\left|\overrightarrow{c}\right|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+2\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}$$

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=0 \quad \cdots\text{②}$$

ここで $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\leq\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}\leq\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}$ として考えても一般性を失わない。このとき②より、

$$3\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\leq\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=0$$

から、

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\leq 0$$

が成立する。

(i) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}<0$ のとき、

$$2\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}\geq\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}>0$$

なので $\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}>0$ だから3つの角のうち、少なくとも1つは鋭角、少なくとも1つは鈍角である。

(ii) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$ のとき、 $0\leq\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}\leq\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}$ であり、

$$0\leq 2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}\leq\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=0$$

より $\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=0$ である。したがって、 $\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=0$ だから3つの角は全て直角である。

以上より題意は示せた。 …証明終わり

$$(4) \quad \left|\overrightarrow{PQ}\right|^2=\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right|^2$$

$$=\left|\overrightarrow{a}\right|^2+\left|\overrightarrow{b}\right|^2+\left|\overrightarrow{c}\right|^2+2\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}\right)$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+2\cdot 0$$

$$=4$$

よって、

$$PQ=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=2 \quad \cdots\text{答}$$

これよりPQは球Sの直径であるから、Oは線分PQの中点である。

すると、

$$\overrightarrow{p}=\overrightarrow{PO}=\frac{3}{2}\overrightarrow{PG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$$

であり、

$$2\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{a}=\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$$

$$=\left|\overrightarrow{a}\right|^2+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}$$

より、(1)の結果とで、

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=0$$

②とで、

$$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=0$$

よって(3)により $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=0$ だから、求める体積をVとして、

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle PAB\cdot PC$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{27} \quad \cdots\text{答}$$

[V]

$$(1) \quad \frac{dx}{d\theta} = (-\sin\theta)\cos\theta + (1+\cos\theta)(-\sin\theta) \\ = -\sin 2\theta - \sin\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = (-\sin\theta)\sin\theta + (1+\cos\theta)\cos\theta \\ = \cos 2\theta + \cos\theta$$

よって、

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{(-\sin 2\theta - \sin\theta)^2 + (\cos 2\theta + \cos\theta)^2} \\ = \sqrt{2 + 2(\sin 2\theta \sin\theta + \cos 2\theta \cos\theta)} \\ = \sqrt{2 + 2\cos(2\theta - \theta)} \\ = \sqrt{4 \frac{1 + \cos\theta}{2}} \\ = 2\sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \\ = 2\left|\cos \frac{\theta}{2}\right| \quad \cdots \text{答}$$

$$(2) \quad l(a) = \int_a^{a+\frac{2\pi}{3}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta \\ = 2 \int_a^{a+\frac{2\pi}{3}} \left|\cos \frac{\theta}{2}\right| d\theta$$

ここで $-\pi \leq a \leq \frac{\pi}{3}$ のとき、 $-\pi \leq a \leq \theta \leq a + \frac{2\pi}{3} \leq \pi$ なので、

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2}$$

よって $\cos \frac{\theta}{2} \geq 0$ であるから、

$$l(a) = 2 \int_a^{a+\frac{2\pi}{3}} \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\ = 4 \left[\sin \frac{\theta}{2} \right]_a^{a+\frac{2\pi}{3}} \\ = 4 \left\{ \sin \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{3} \right) - \sin \frac{a}{2} \right\} \\ = 4 \cdot 2 \cos \frac{a + \frac{\pi}{3}}{2} \sin \frac{\pi}{6} \\ = 4 \cos \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \quad \cdots \text{答}$$

(3) $\frac{\pi}{3} \leq a \leq \pi$ のとき、

$\frac{\pi}{3} \leq a \leq \theta \leq a + \frac{2\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{3}$ なので、

$$\frac{\pi}{6} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{5\pi}{6}$$

より、

$$a \leq \theta \leq \pi \text{ で } \cos \frac{\theta}{2} \geq 0$$

$$\pi \leq \theta \leq a + \frac{2\pi}{3} \text{ で } \cos \frac{\theta}{2} \leq 0$$

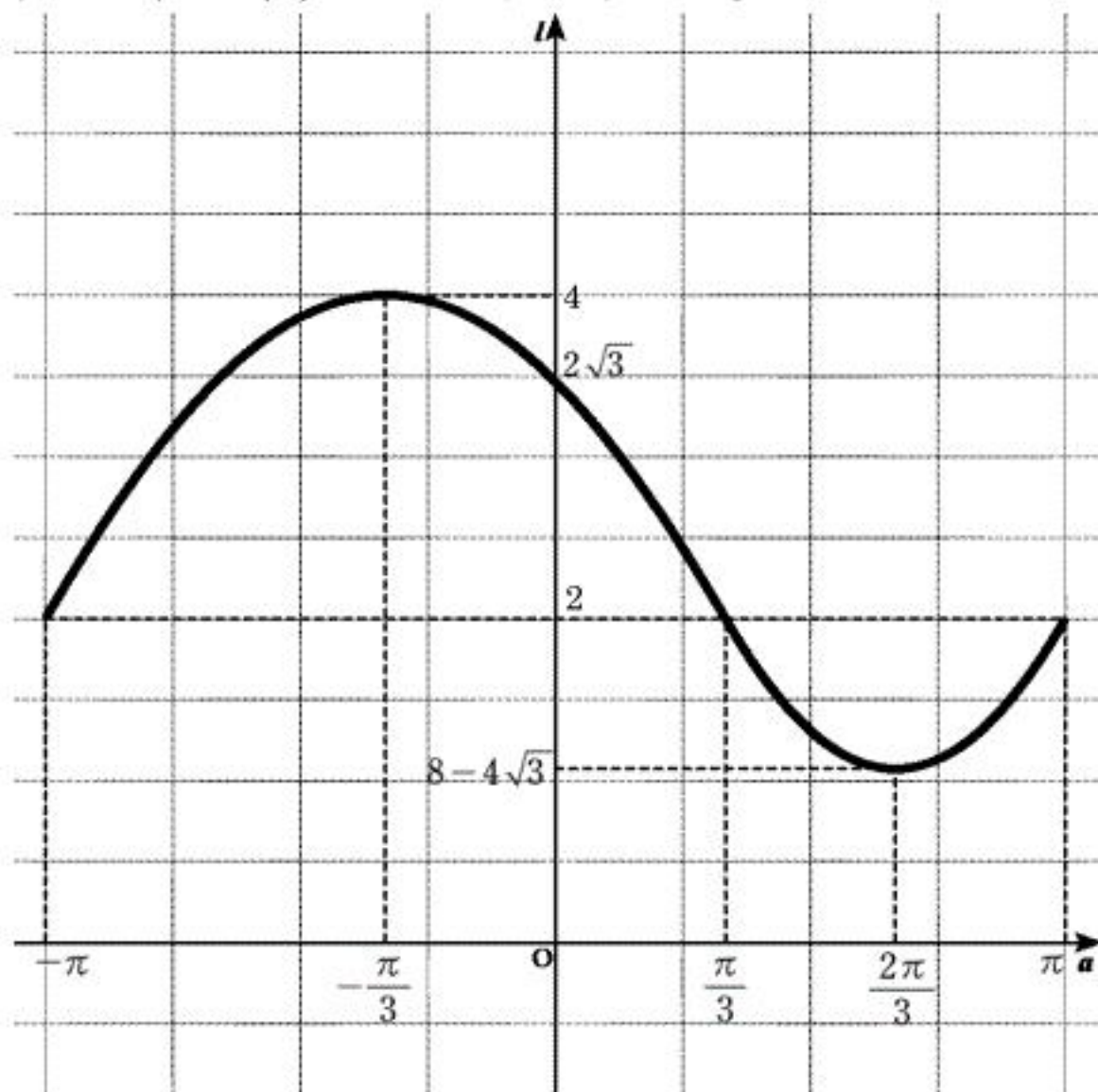
であるから、

$$l(a) = 2 \int_a^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta - 2 \int_{\pi}^{a+\frac{2\pi}{3}} \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\ = 4 \left[\sin \frac{\theta}{2} \right]_a^{\pi} - 4 \left[\sin \frac{\theta}{2} \right]_{\pi}^{a+\frac{2\pi}{3}} \\ = 4 \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{a}{2} \right) - 4 \left\{ \sin \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{3} \right) - \sin \frac{\pi}{2} \right\} \\ = 8 - 4 \left\{ \sin \frac{a}{2} + \sin \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{3} \right) \right\} \\ = 8 - 4 \cdot 2 \sin \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) \\ = 8 - 4\sqrt{3} \sin \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{6} \right)$$

以上より、

$$l(a) = \begin{cases} 4 \cos \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{6} \right) & \left(-\pi \leq a \leq \frac{\pi}{3} \right) \\ 8 - 4\sqrt{3} \sin \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{6} \right) & \left(\frac{\pi}{3} \leq a \leq \pi \right) \end{cases}$$

以上から、 $l=l(a)$ のグラフは下のようになる。



よって、

$$\text{最大値は } l\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 4$$

$$\text{最小値は } l\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 8 - 4\sqrt{3} \quad \cdots \text{答}$$