

平成 10 年度入学者選抜試験問題
理学部数理科学科

数 学

前 期 日 程

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 理学部数理科学科受験生は問題〔5〕,〔7〕,〔8〕,〔9〕,〔10〕をそれぞれ対応した番号の解答用紙に解答しなさい。
- 3 指定された問題以外を解答した場合は、その解答は無効になります。
- 4 この問題冊子は、1 ページから 11 ページまでです。
- 5 試験中に問題冊子の印刷不鮮明・落丁・乱丁、解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 6 監督者の指示にしたがって、解答用紙に**大学受験番号**を正しく記入しなさい。
大学受験番号が正しく記入されていない場合は、採点できないことがあります。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

〔 1 〕 2 次関数 $y = 3x^2 - 6x + 2$ について、次の各問に答えよ。

(1) この関数の $-1 \leq x \leq 4$ における最大値および最小値を求めよ。

(2) この関数のグラフを x 軸方向に a だけ平行移動して得られる曲線の方程式が

$$y = 3x^2 - 18x + b$$

となるような a, b の値を求めよ。

〔2〕 放物線

$$y = x^2 + ax + b$$

と x 軸が異なる 2 つの交点 A, B をもつとき、次の各問に答えよ。ただし、 a, b は定数とし、 $D = a^2 - 4b$ とする。

- (1) この放物線の頂点 C の座標を a, D を用いて表せ。
- (2) D の値の範囲を求めよ。
- (3) 線分 AB の長さを D を用いて表せ。
- (4) 3 点 A, B, C が正三角形の 3 つの頂点をなすとき、 D の値を求めよ。

〔 3 〕 m が正の実数のとき、曲線 $C: y = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$ と直線 $l: y = 3x + m$ について、次の各問に答えよ。

(1) 曲線 C と直線 l の共有点を調べよ。

(2) 曲線 C と直線 l が異なる 2 点 A, B で交わるとき、線分 AB の長さを求めよ。

(3) 点 P が曲線 C 上を A から B まで動くとき、 $\triangle ABP$ の面積 S の最大値を求めよ。

〔 4 〕 実数 a, b ($ab \neq 0$), x, y について, 次の各問に答えよ。

(1) $A = (a + b)(ax^2 + by^2)$, $B = (ax + by)^2$ の大小を比較せよ。

(2) $C = (ax + by)(ay + bx)$, $D = (a + b)^2 xy$ の大小を比較せよ。

(3) $a > 0$, $b > 0$, $x > 0$, $y > 0$ のとき,

$$E = \sqrt{\frac{ax^2 + by^2}{a + b}}, \quad F = \frac{ax + by}{a + b}, \quad G = \frac{(a + b)xy}{ay + bx}$$

の 3 つの実数の大小を比較せよ。

〔 5 〕 定数 $a, b (b \neq 0), c$ に対して、次のように定義される数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = a, a_{n+1} = \frac{1}{b}(a_n + cn) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、次の各問に答えよ。

- (1) a_1, a_2, a_3 が等差数列をなすための条件を a, b, c を用いて表せ。
- (2) a, b, c が (1) の条件をみたすとき、 a, b, n を用いて一般項 a_n を推測し、それを証明せよ。
- (3) a, b, c が (1) の条件をみたすとき、和 $\sum_{k=1}^n a_k$ の値を a, b, n を用いて表せ。

[6] $\triangle ABC$ の面積を S , 辺 BC , CA , AB の長さをそれぞれ a , b , c ($a > b > c$) とする。点 P が $\triangle ABC$ の内部および周上を動くとき, 点 P から各辺 BC , CA , AB またはその延長上へひいた垂線の長さをそれぞれ x , y , z とする。このとき, 次の各問に答えよ。

- (1) S を a , b , c , x , y , z で表せ。
- (2) $X = ax$, $Y = by$ とおくとき, 点 (X, Y) の存在する範囲を図示せよ。
- (3) $x + y + z$ を a , b , c , S , X , Y で表し, それが最大および最小となる点 P をそれぞれ求めよ。

〔 7 〕 放物線

$$y = x^2 + ax + b$$

と点 $P(X, Y)$ がある。ただし a, b は定数とし、 X, Y は $Y > X^2 + aX + b$ をみたすとする。点 P を通る直線とこの放物線で囲まれる図形の面積を S とするとき、次の各問に答えよ。

- (1) 点 P を通る直線の傾きを m とするとき、面積 S を a, b, m, X, Y で表せ。
- (2) 面積 S が最小となる傾き m とその最小値 $s(X, Y)$ を求めよ。
- (3) c を正数とするとき、 $s(X, Y) - \frac{4}{3}c$ をみたすような点 $P(X, Y)$ の軌跡を求めよ。

〔 8 〕 空間の 3 つのベクトル

$$\vec{a} = (1, 0, 0), \vec{b} = (x, y, z), \vec{c} = (0, 0, 1)$$

は、次の条件 (i), (ii), (iii) をみたしている。

(i) $|\vec{b}| = 1$

(ii) $\vec{b}$ と $\vec{a}$ のなす角, $\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角は共に 120° である。

(iii) $y \geq 0$

このとき、次の各問に答えよ。

(1) ベクトル $\vec{b}$ を求めよ。

(2) 空間の任意の点 P に対して、3 点 Q, R, S を

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{a}, \overrightarrow{QR} = \vec{b}, \overrightarrow{RS} = \vec{c}$$

によって定めるとき、4 点 P, Q, R, S は正 4 面体の頂点になることを示せ。

〔 9 〕 次の問題(A), (B)のいずれか一方のみを選んで解答しなさい。

(A) xy 平面上に

$$\left\{ (x, y) \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 1 \right\}$$

で定められる線分 l がある。このとき、次の各問に答えよ。

- (1) $f(1, 0) = (1, 1)$, $f(1, 1) = (0, 2)$ となるような 1 次変換 f を表す 2×2 行列 A を求めよ。
- (2) 線分 l の f による像を図示せよ。
- (3) $l_0 = l$ とし, $l_{n-1} (n = 1, 2, \dots)$ の f による像を l_n とする。このとき, 8 つの線分 $l_0, l_1, \dots, l_7$ でできる折れ線を図示せよ。また, その折れ線の長さを求めよ。

(B) 複素数平面上に 2 点 $1, 1+i$ を結ぶ線分 l がある。このとき、次の各問に答えよ。

- (1) $\alpha(1+i) = 2i$ となるような複素数 α を求めよ。
- (2) 複素数平面上に集合 $\{\alpha z \mid z \in l\}$ を図示せよ。
- (3) $l_0 = l$ とし, $l_n = \{\alpha z \mid z \in l_{n-1}\} (n = 1, 2, \dots)$ とする。このとき, 8 つの線分 $l_0, l_1, \dots, l_7$ でできる折れ線を図示せよ。また, その折れ線の長さを求めよ。

〔10〕 xy 平面上の動点 P の時刻 t における座標 (x, y) は

$$x = t^2 - \sin t^2$$

$$y = \begin{cases} 1 - \cos t^2 & (0 \leq t \leq \sqrt{\pi}) \\ 3 + \cos t^2 & (\sqrt{\pi} < t \leq \sqrt{2\pi}) \end{cases}$$

によって与えられる。このとき、次の各問に答えよ。

- (1) 点 P の時刻 t における速度ベクトル $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$ を求めよ。
- (2) 点 P が時刻 0 から時刻 T までの間に動いた道のり $s(T)$ を求めよ。

[11] 曲線 $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ と x 軸, および 2 直線 $x = a$, $x = a + 2$ で囲まれた部分を, x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V(a)$ とする。 $a > 0$ とするとき, 次の各問に答えよ。

- (1) 導関数 $V'(a)$ を求めよ。
- (2) 体積 $V(a)$ を最大にする a の値を求めよ。
- (3) $\tan \frac{\pi}{8}$ および $\tan \frac{3\pi}{8}$ の値を求めよ。
- (4) 体積 $V(a)$ の最大値を求めよ。