

平成11年度入学者選抜試験問題

理学部数理科学科

数 学

前 期 日 程

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 問題の解答を、それぞれ対応した番号の解答用紙に書きなさい。
- 3 問題は[1], [2], [3], [4], [5]の5問です。
- 4 試験中に問題冊子の印刷不鮮明・落丁・乱丁、解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 5 監督者の指示にしたがって、解答用紙に大学受験番号を正しく記入しなさい。
大学受験番号が正しく記入されていない場合は、採点できないことがあります。
- 6 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

[1] $U = \{x \mid x \text{ は自然数, } 1 \leq x \leq 10000\}$ を全体集合とし, その部分集合 A, B を

$$A = \{x \mid x \in U, x \text{ は } 7 \text{ の倍数であるが } 13 \text{ の倍数ではない}\}$$

$$B = \{x \mid x \in U, x \text{ は } 11466 \text{ の約数である}\}$$

とすると, 次の集合の要素の個数を求めよ。

$$(1) A \quad (2) \overline{B} \quad (3) A \cap B \quad (4) A \cap \overline{B} \quad (5) A \cup \overline{B}$$

[2] $\alpha = \cos 36^\circ + i \sin 36^\circ$ とし, 次の各問に答えよ。

(1) 因数定理を用いて, $(x-1)(x-\alpha)(x-\alpha^2)\cdots(x-\alpha^9)$ を計算せよ。

(2) $(x-1)(x-\alpha^2)(x-\alpha^4)(x-\alpha^6)(x-\alpha^8)$ を計算せよ。

(3) $(x-\alpha)(x-\alpha^3)(x-\alpha^7)(x-\alpha^9)$ を計算せよ。

(4) (3) を用いて, $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ を計算せよ。

[3] 座標平面上に点列 $\{P_n\}$, $\{Q_n\}$ が次のように定められている。

P_1 の座標は $(0, 0)$, Q_1 の座標は $(1, 0)$ であり, 点 P_n を中心に点 Q_n を反時計まわりに 60° 回転して得られる点を Q_{n+1} , 線分 $P_n Q_{n+1}$ の中点を P_{n+1} とする。また, 点 P_n に対応する複素数を z_n , Q_n に対応する複素数を w_n とする。 $\alpha = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$ とおく。

このとき, 次の各問に答えよ。

(1) w_{n+1} と z_{n+1} を w_n, z_n, α を用いて表せ。

(2) $w_n - z_n$ を α を用いて表せ。

(3) 1 でない複素数 β に対して, $S_n = \beta + \beta^2 + \cdots + \beta^n$ とおく。
等式

$$S_n = \frac{\beta(1 - \beta^n)}{1 - \beta}$$

を証明せよ。

(4) z_n を α を用いて表せ。

[4] 楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

上に点 $P(x_0, y_0)$ ($x_0 > 0, y_0 > 0$) をとる。点 P における接線を l_1 とし、原点を通る l_1 に平行な直線を l_2 , l_2 と楕円の交点を A, B とする。ただし、 A の x 座標は正とする。このとき、次の各問に答えよ。

- (1) 点 P を通り l_1 に垂直な直線 l の方程式を求めよ。
- (2) 点 A, B の座標を求めよ。
- (3) l と l_2 の交点を H とするとき、線分 PH の長さを求めよ。
- (4) $\triangle PAB$ の面積を求めよ。

[5] 原点 O を出発して次のルールに従って数直線上を動く点 P がある。

- (a) さいころをふって 3 以下の目が出たときは右に 1, 5 以上の目が出たときは左に 1, それぞれ動く。また, 4 の目が出たときは動かない。
- (b) 点 P の座標が -1 になったら, さいころをふるのを止め点 P はそこにとどまる。それ以外の場合は, さいころをまたふる。
- (c) さいころをふり終わると同時に点 P の移動も行われる。

このとき, 次の各問に答えよ。

- (1) さいころを 3 回ふることができ, かつその結果点 P の座標が次のそれぞれの値である確率を求めよ。

(i) 3 (ii) 2 (iii) 1 (iv) 0

- (2) さいころを多くとも 3 回ふり移動も終えた後, 点 P の座標が -1 である確率を求めよ。

- (3) さいころを多くとも 3 回ふり移動も終えた後の, 点 P の座標の期待値を求めよ。