

[1] 2 次関数 $f(x) = x^2 - 2ax + b$ について、次の各問に答えよ.

(1) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の座標を求めよ.

(2) 次のそれぞれの場合について、 $f(x)$ の $-1 \leq x \leq 1$ における最大値、最小値を求めよ.

(i) $a \leq -1$, (ii) $-1 < a < 0$, (iii) $0 \leq a < 1$, (iv) $1 \leq a$

(3) $-1 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大値が 1, かつ最小値が -1 となるような a, b の値の組をすべて求めよ.

[2] a を正の定数とする. a_1 は $a_1 > \sqrt{a}$ をみたす定数とし,
 $a_2, a_3, a_4, \dots$ を

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a}{a_n} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) すべての自然数 n について $a_n > \sqrt{a}$ が成り立つことを示せ.

(2) $a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$ が成り立つことを示せ.

(3) すべての自然数 n について

$$\frac{a_{n+1} - \sqrt{a}}{a_n - \sqrt{a}} < \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ.

【3】 中心の座標が $(2, 2)$ で半径が $\sqrt{2}$ の円 C がある. いま, 原点 O を通り, C に接する 2 つの直線を l_1, l_2 とする. ただし, l_1 の傾きは l_2 の傾きより大きいものとする. 次の各問に答えよ.

(1) l_1 および l_2 の方程式を求めよ.

(2) C と l_1, l_2 との接点をそれぞれ P, Q とする. このとき, P および Q の座標を求めよ.

(3) 線分 OP および線分 PQ の長さを求めよ.

(4) C と線分 PQ で囲まれた 2 つの部分のうち, C の中心を含まない方の面積 S を求めよ.

[4] 曲線 $y = f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$ ($a > 0$) について, 次の各問に答えよ.

(1) 接線の傾きが最小となる接点 P の座標を求めよ.

(2) P における接線の方程式 $y = g(x)$ を求めよ.

(3) 3 次式 $f(x) - g(x)$ を因数分解せよ.

(4) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = g(x)$ および y 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ. ただし, $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ (C は積分定数)である.

[5] 次の各問に答えよ.

- (1) 2つの複素数 $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ (a, b, c, d は実数) に対して, 次の2つの等式が成り立つことを示せ.

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

- (2) 複素数 z が3次方程式

$$(A) \quad mx^3 + 3x^2 + nx + 1 = 0 \quad (m, n \text{ は実数})$$

の解ならば, $\bar{z}$ もこの方程式の解であることを示せ.

- (3) 複素数 $1 + \sqrt{2}i$ が (A) の解であるとき, m, n の値および残りの解を求めよ.