

[1] 関数 $y = x^3 - 3|x| + 1$ と $y = 2x + \alpha$ (α は実数) のグラフの共有点の個数を求めたい. 次の各問に答えよ.

(1) $y = x^3 - 3|x| + 1$ の増減および極値を調べ, グラフをかけ.

(2) $y = x^3 - 3|x| + 1$ と $y = 2x + \alpha$ のグラフの共有点の個数を求めよ.

(3) $y = x^3 - 3|x| + 1$ と $y = 2x + \alpha$ のグラフの共有点の個数を求めよ.

[2] 自然数 n および $x \geq 1$ を満たす実数 x に対して

$$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad B_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log (n+1)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \log \frac{2x+1}{2x-1}$$

とする。次の各問に答えよ。

- (1) 不等式 $B_n < A_n$ を示せ。また極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - B_n)$ を求めよ。
- (2) 関数 $f(x)$ は増加する関数であることを示せ。また極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を求めよ。
- (3) 等式 $f(n+1) = A_{n+1} - A_n$ が成り立つことを示せ。
- (4) 不等式 $A_n > A_{n+1}$ を示せ。
- (5) 不等式 $B_n < B_{n+1}$ を示せ。

[3] n を自然数とする. 次の各問に答えよ.

(1) 次の等式

$$\frac{1}{n(n+1)(n+3)} = a \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + b \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right)$$

がすべての n に対して成り立つような, 定数 a, b を求めよ.

(2) (1) の結果を利用して, 次の和

$$S(n) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+3)}$$

を求めよ.

(3) $S(10)$ を計算せよ. ただし, その値は既約な 1 つの分数で表せ.

[4] 複素数 $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z = \sqrt{3} - i$ に対し, 次の各問に答えよ.

- (1) 複素数 α を極形式で表せ.
- (2) 複素数 αz の偏角と絶対値を求めよ. ただし $0^\circ \leq \arg \alpha z < 360^\circ$ とする.
- (3) 複素数 z および $-1 - i$ の表す点を, それぞれ P , Q とする. このとき点 Q を中心として点 P を 90° だけ回転した点の表す複素数は αz であることを示せ.
- (4) さらに実数 k に対して, 複素数 $k + ki$ の表す点を R とする. このとき点 R を中心として点 P を 60° だけ回転した点の表す複素数が αz になるような k の値を求めよ.

[5] E を 3 次の単位行列, O を同じ型の零行列とする. A は $A^2 \neq O$, $A^3 = O$ を満たす 3 次の正方行列とする. $X = A + E$ とおくとき, 次の各問に答えよ.

(1) X^2 , X^3 , X^4 のそれぞれを A^2 , A , E を用いて表せ.

(2) n を自然数とするととき, X^n を A^2 , A , E を用いて表せ.

(3) 等式 $X(aA^2 + bA + cE) = E$ が成り立つような定数 a , b , c の値を次のようにして求めたい.

(i) 上の等式の両辺に, 左または右から A^2 を掛けることによって定数 c の値を求めよ.

(ii) 定数 a , b の値を求めよ.