

〔1〕 次の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\int x e^{3x^2} dx$ を求めよ。

(2) $\sin 67.5^\circ$ の値を求めよ。

(3) 関数 $f(x) = x^{x+1}$ ($x > 0$) を微分せよ。

〔2〕 y 軸上の点 $P(0, p)$ から曲線 $C: y = x^2 + a$ (a は定数) にひいた接線のうち、傾きが正のものを l_1 、負のものを l_2 とする。接線 l_1 と曲線 C の接点を A とするとき、次の問いに答えよ。ただし、 $a > p$ とする。

(1) 接線 l_1 の方程式と点 A の座標を求めよ。

(2) 曲線 C 上の点 A における法線 m の方程式を求めよ。

(3) 法線 m が接線 l_2 と平行になるとき、 $a - p = \frac{1}{4}$ となることを示せ。そのとき、法線 m と曲線 C で囲まれた部分の面積を求めよ。

〔3〕 次のように、0 の間にはさまれる 1 の個数が 1 つずつ増える数列がある。

$0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots$

上の数列を初項から順に $\{0\}, \{1, 0\}, \{1, 1, 0\}, \{1, 1, 1, 0\}, \dots$ のように区分し、それぞれ、第 1 群、第 2 群、第 3 群、第 4 群、 $\dots$ と呼ぶことにする。次の問いに答えよ。

- (1) 第 1 群から第 n 群までに含まれる項の総数を求めよ。
- (2) 第 2002 項は第何群の第何番目にあるか。
- (3) 初項から第 2002 項までの和を求めよ。

〔4〕 長さ2の線分 AB を直径とする円 C 上に点 P がある。ここで $\angle BAP = \theta$ とする。点 A を中心として AP を半径とする円が線分 AB と交わる点を Q とし、線分 QB , PB と円弧 PQ で囲まれる部分の面積を $S(\theta)$ とするとき、次の問いに答えよ。ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

(1) $S(\theta) = 2 \cos \theta (\sin \theta - \theta \cos \theta)$ となることを示せ。

(2) $F(\theta) = \frac{S'(\theta)}{2 \sin \theta \cos \theta}$ で定義される関数 $F(\theta)$ のグラフの概形をかけ。ただし、 $S'(\theta)$ は関数 $S(\theta)$ の導関数である。

(3) $S(\theta)$ が最大となるとき、 $S(\theta)$ の値は $\triangle PAB$ の面積の半分となることを証明せよ。