

数 学

I 次の問に答えよ。ただし i は虚数単位である。

- (1) 次の式を数学的帰納法により証明せよ。ただし n は正の整数である。

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

- (2) 次の値を(1)の式を使って求めよ。ただし N は正の整数であるとする。

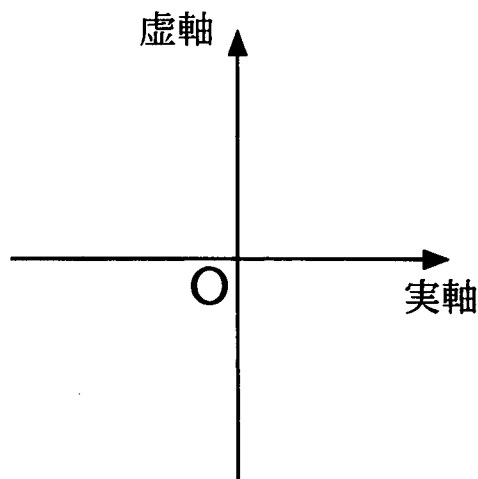
$$\left[\cos\left(\frac{2\pi}{2N}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{2N}\right) \right] + \left[\cos\left(\frac{2\pi}{2N}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{2N}\right) \right]^{N+1}$$

- (3) 次の値を求めよ。ただし N は正の整数であるとする。

$$\sum_{n=1}^{2N} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{2N}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{2N}\right) \right]^n$$

- (4) 次の式を $k=1$ から $k=4$ まで計算し、その4つの値を図に示されているような複素平面上に図示せよ。

$$\sum_{n=1}^k \left[\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) \right]^n$$



- Ⅱ (1) xy 平面上の 2 つの曲線 $y - x^2 + 2ax - a^2 + a = 0$, $y + x^2 - 2 = 0$ が 2 点で交わるための実数 a の範囲を求めよ。
- (2) 2 つの交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とする。 $\beta - \alpha$ を求めよ。
- (3) 上の 2 つの曲線によって囲まれた部分の面積 S を求めよ。
- (4) 面積 S が最大になるときの a の値を求めよ。また、面積 S の最大値を求めよ。