

I

(1)

与式より

$$\begin{aligned} y &= 2\cos 2\theta \sin \theta + \sin \theta \\ &= 2(1-2\sin^2 \theta)\sin \theta + \sin \theta \\ &= 2(1-2x^2)x + x \\ &= -4x^3 + 3x \end{aligned}$$

となる。

(答) $y = -4x^3 + 3x$

(2)

$$-\frac{1}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi \text{ より,}$$

$$\sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) \leq \sin \theta \leq \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$$

となる。

(答) $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$

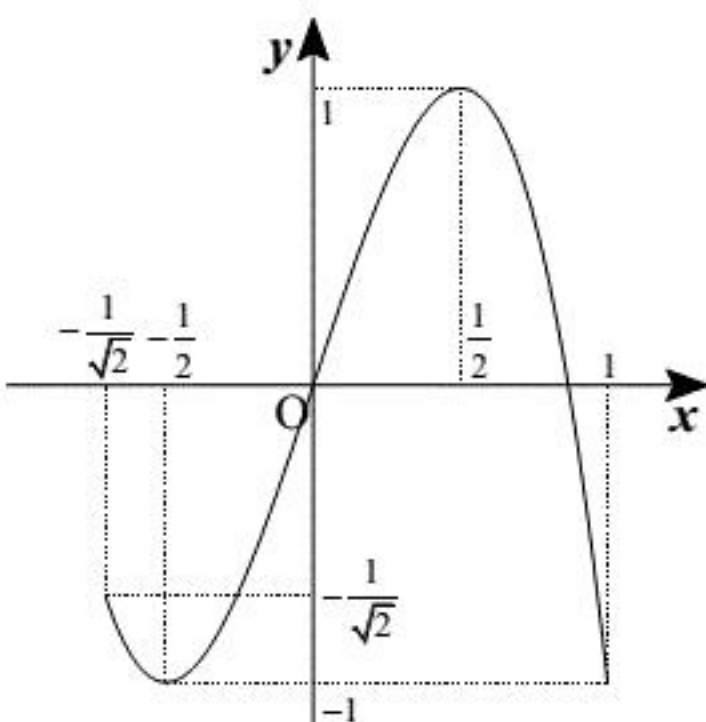
(3)

$$y = -4x^3 + 3x \text{ より}$$

$$\begin{aligned} y' &= -12x^2 + 3 \\ &= -3(2x-1)(2x+1) \end{aligned}$$

となるから、 x の範囲に気を付けると増減表とグラフは下の通りである。

x	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	



(答) 前図

(4)

(3)より y は $x = \frac{1}{2}$ 、つまり $\theta = \frac{\pi}{6}$ のときに最大値 1 をとる。また、 $x = -\frac{1}{2}, 1$ 、つまり

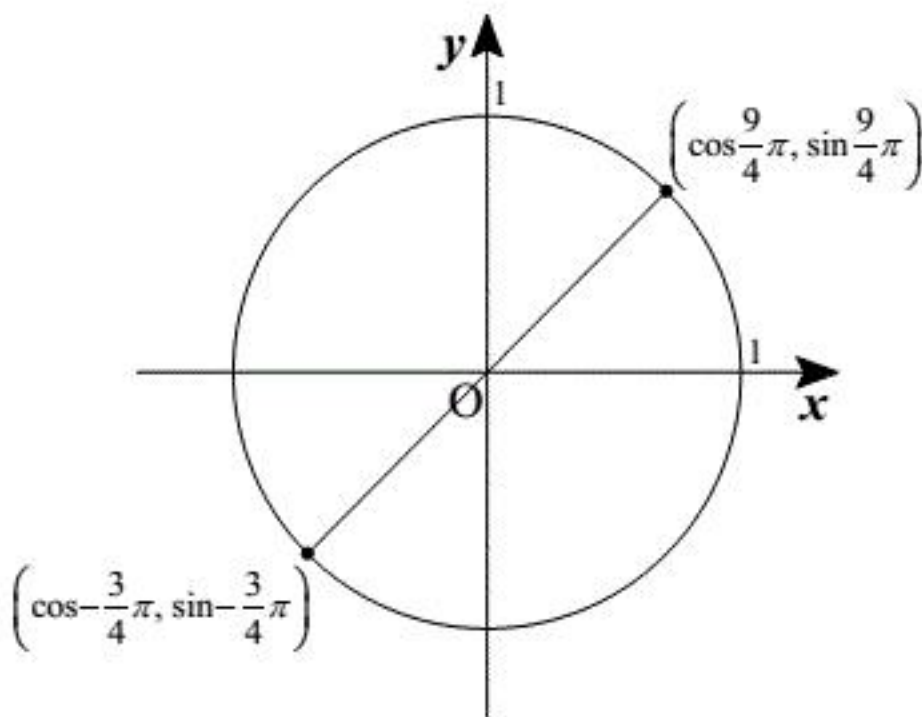
$\theta = -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$ のときに最小値 -1 をとる。

(答) 最大値: $1\left(\theta = \frac{\pi}{6}\right)$, 最小値: $-1\left(\theta = -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$

(補足)

$$\begin{aligned} y &= 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta \\ &= \sin 3\theta \end{aligned}$$

であり、 $-\frac{3}{4}\pi \leq 3\theta \leq \frac{9}{4}\pi$ であるから、下図より最大値、最小値とそれを与える θ が求まる。



II

(1)

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(1-x)(a-x)dx &= a \int_0^1 x(1-x)dx - \int_0^1 x^2(1-x)dx \\ &= \left[\frac{a}{2}x^2 - \frac{a}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 \quad \cdots \textcircled{1} \\ &= \frac{a}{6} - \frac{1}{12}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{a}{6} - \frac{1}{12}$$

(2)

$$F(t) = \int_0^t x(1-x)(a-x)dx$$

とおくと、①より

$$F(t) = \frac{a}{2}t^2 - \frac{1}{3}(a+1)t^3 + \frac{1}{4}t^4$$

であるから、 $0 < a < 1$ より

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(1-x)|a-x|dx &= \int_0^a x(1-x)(a-x)dx - \int_a^1 x(1-x)(a-x)dx \\ &= F(a) - F(0) - \{F(1) - F(a)\} \\ &= 2F(a) - F(0) - F(1) \\ &= 2\left(-\frac{a^4}{12} + \frac{a^3}{6}\right) - \left(\frac{a}{6} - \frac{1}{12}\right) \\ &= -\frac{a^4}{6} + \frac{a^3}{3} - \frac{a}{6} + \frac{1}{12}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -\frac{a^4}{6} + \frac{a^3}{3} - \frac{a}{6} + \frac{1}{12}$$