

[1]

(1)

$$y' = -ce^{-\alpha x}$$

であるから、求める接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -ce^{-\alpha}(x-a) + e^{-\alpha a} \\ &= -ce^{-\alpha}x + (ac+1)e^{-\alpha a} \end{aligned}$$

となる。ここで $h(x) = e^{-\alpha x} - g(x)$ とおくと

$$h(x) = e^{-\alpha x} + ce^{-\alpha a}x - (ac+1)e^{-\alpha a}$$

となるから

$$\begin{aligned} h'(x) &= -ce^{-\alpha x} + ce^{-\alpha a} \\ &= -c(e^{-\alpha x} - e^{-\alpha a}) \end{aligned}$$

となる。 $c > 0$ より $ce^{-\alpha x}$ は単調減少関数であるので、 $h(x)$ の増減は下のようになる。

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

よって $h(x)$ は $x=a$ で最小値

$$\begin{aligned} h(a) &= e^{-\alpha a} + ace^{-\alpha a} - (ac+1)e^{-\alpha a} \\ &= 0 \end{aligned}$$

を取るので、

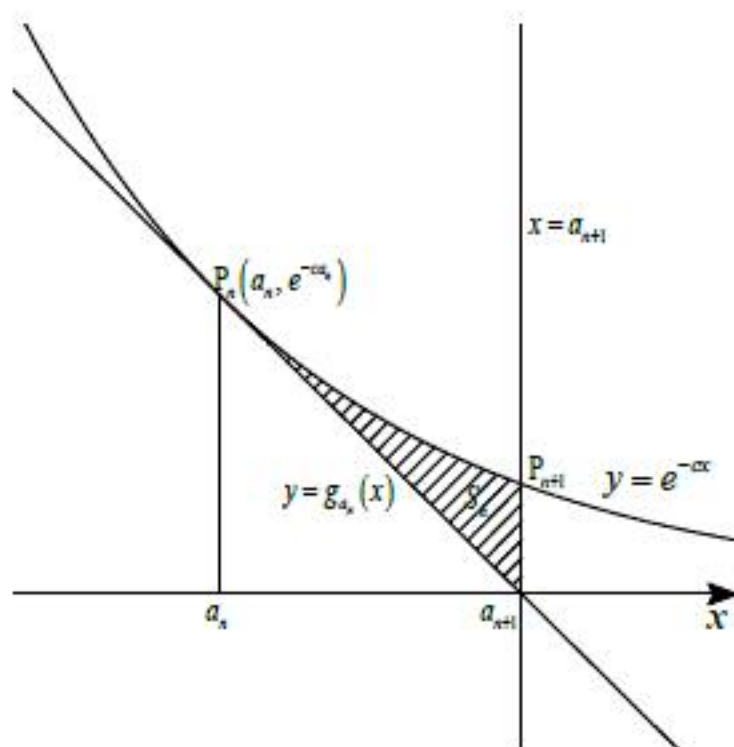
$$\begin{aligned} h(x) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow e^{-\alpha x} &\geq g(x) \end{aligned}$$

が示された。

(証明終)

$$(\text{答}) \quad y = -ce^{-\alpha}x + (ac+1)e^{-\alpha}$$

(2)



$g_{a_n}(x) = -ce^{-\alpha a_n}x + (a_n c + 1)e^{-\alpha a_n}$ とおく。仮定より $g_{a_n}(a_{n+1}) = 0$ であるから

$$\begin{aligned} g_{a_n}(a_{n+1}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -ce^{-\alpha a_n}a_{n+1} + (a_n c + 1)e^{-\alpha a_n} &= 0 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= a_n + \frac{1}{c} (\because c > 0, e^{-\alpha a_n} > 0) \\ &= a_1 + \frac{n}{c} \\ &= \frac{n}{c} (\because a_1 = 0) \end{aligned}$$

となる。これは $n=0$ としても成り立つ。これより $a_{n+1} > a_n$ であるから、 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{a_n}^{a_{n+1}} \{e^{-\alpha x} - g_{a_n}(x)\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{c} e^{-\alpha x} \right]_{a_n}^{a_{n+1}} - \frac{1}{2} \cdot e^{-\alpha a_n} \cdot (a_{n+1} - a_n) \\ &= -\frac{1}{c} e^{-n} + \frac{1}{c} e^{-(n-1)} - \frac{1}{2c} e^{-(n-1)} \left(\because a_{n+1} = \frac{n}{c} \right) \\ &= \frac{1}{2c} e^{-n} (e-2) \end{aligned}$$

となる。途中 $\int_{a_n}^{a_{n+1}} g_{a_n}(x) dx$ が高さ $e^{-\alpha a_n}$ 底辺の長さ $a_{n+1} - a_n$ の直角三角形であることを利用した。

$$(\text{答}) \quad S_n = \frac{1}{2c} e^{-n} (e-2)$$

(3)

(2)より

$$\begin{aligned} S_{2k-1} - S_{2k} &= \frac{1}{2c} e^{-2k+1} (e-2) - \frac{1}{2c} e^{-2k} (e-2) \\ &= \frac{1}{2c} e^{-2k} (e-2)(e-1) \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} A_n - B_n &= \sum_{k=1}^n (S_{2k-1} - S_{2k}) \\ &= \frac{1}{2c} (e-2)(e-1) \sum_{k=1}^n e^{-2k} \\ &= \frac{1}{2c} (e-2)(e-1) \cdot \frac{e^{-2}(1-e^{-2n})}{1-e^{-2}} \\ &= \frac{1}{2c} (e-2)(e-1) \cdot \frac{1-e^{-2n}}{e^2-1} \\ &= \frac{(e-2)}{2c(e+1)} (1-e^{-2n}) \end{aligned}$$

となり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-2n} = 0$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - B_n) = \frac{(e-2)}{2c(e+1)}$$

となる。

[2]

(1)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく。ハミルトン・ケーリーの定理より

$$\begin{aligned} A^2 &= (a+d)A - (ad-bc)E \\ &= \alpha E \end{aligned}$$

$$(a+d)A - (ad-bc)E = \alpha E$$

$$\Leftrightarrow (a+d)A = (ad-bc+\alpha)E \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで $a+d \neq 0$ のとき、上式より $A = kE$ とおけるから

$$\begin{aligned} A^2 &= k^2 E \\ &= \alpha E \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow k = \pm\sqrt{\alpha} \ (\alpha \geq 0)$$

となる。 $a+d=0$ のとき、 $\textcircled{1}$ 式より

$$ad-bc+\alpha=0$$

$$\Leftrightarrow bc=ad+\alpha$$

$$= \alpha - a^2 \ (\because d = -a)$$

となる。以上から、

$$A = \begin{cases} \pm\sqrt{\alpha}E \ (\alpha \geq 0 \text{ のときのみ存在}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \ (a \text{ は任意の実数, } b, c \text{ は } bc = \alpha - a^2 \text{ を満たす実数。}) \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) A = \begin{cases} \pm\sqrt{\alpha}E \ (\alpha \geq 0 \text{ のときのみ存在}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \ (a \text{ は任意の実数, } b, c \text{ は } bc = \alpha - a^2 \text{ を満たす実数。}) \end{cases}$$

(2)

例えば

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & -p \end{pmatrix}$$

について考える。このとき

$$AB = \begin{pmatrix} ap+bq & -bp \\ -aq & ap \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} ap & bp \\ aq & ap+bq \end{pmatrix}$$

であるから

$$AB = -BA$$

$$\Leftrightarrow bq = -2ap$$

となる。よって $b = -\sqrt{2}a$, $q = \sqrt{2}p$ とすれば、 $AB = -BA$ となる。ここで(1)より、

$A^2 = \alpha E$, $B^2 = \beta E$ となるとき

$$\alpha - a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \pm\sqrt{\alpha} \ (\alpha > 0)$$

$$\beta - p^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow p = \pm\sqrt{\beta} \ (\beta > 0)$$

となるから、 $a = \sqrt{\alpha}$, $p = \sqrt{\beta}$ とすれば、 $A^2 = \alpha E$, $B^2 = \beta E$ を満たす。よって条件を満たす

A, B の一例として

$$A = \sqrt{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \sqrt{\beta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

が挙げられる。

$$(\text{答}) \ A = \sqrt{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \sqrt{\beta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

(3)

$AB = -BA$ であるから A は E の実数倍ではない。 $A^2 = \alpha E$ であるから(1)より

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \ (bc = \alpha - a^2)$$

と仮定する。ここで

$$AB = -BA$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2b & -a-b \\ -2a+c & a-c \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a-c & a+b \\ 2a-c & a+2b \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 2a+2b=c$$

となるから、 $bc = \alpha - a^2$ に代入すると

$$b(2a+2b) = \alpha - a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + 2b^2 = \alpha$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 + b^2 = \alpha$$

となるが、左辺は0以上で、右辺は負であるから、これを満たす a, b は存在しない。よって題意は示された。

(証明終)

[3]

(1)

$a > 1$ であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= \log_x a + \log_a x - 2 \\ &= \frac{1}{\log_a x} + \log_a x - 2 \end{aligned}$$

となる。ここで $\log_a x = \frac{\log x}{\log a} = t$ とおくと

$$f(x) = \frac{1}{t} + t - 2$$

となるから

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{dt}{dx} \cdot \frac{d}{dt} f(x) \\ &= \frac{1}{x \log a} \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) \\ &= \frac{1}{x \log a} \left\{ 1 - \left(\frac{\log a}{\log x} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{(\log x - \log a)(\log x + \log a)}{x \log a (\log x)^2} \end{aligned}$$

となる。 $a > 1$ に気を付けると $f(x)$ の増減は下の通りである。

x	0	...	$\frac{1}{a}$	...	1	...	a	...
$f'(x)$	$\nearrow$	+	0	-	$\searrow$	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	0	$\searrow$

よって極大値は $f\left(\frac{1}{a}\right) = -4$ 、極小値は $f(a) = 0$ となる。

(答) 極大値: $f\left(\frac{1}{a}\right) = -4$ 、極小値: $f(a) = 0$

(2)

(i)

$$y = \log_a x = \frac{\log x}{\log a} \text{ より}$$

$$y' = \frac{1}{x \log a}$$

となるから、P における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{t \log a} (x - t) + \frac{\log t}{\log a} \\ &= \frac{x}{t \log a} + \frac{\log t - 1}{\log a} \end{aligned}$$

であるから、Q の x 座標は

$$\begin{aligned} \frac{x}{t \log a} + \frac{\log t - 1}{\log a} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -t(\log t - 1) \end{aligned}$$

となる。よって Q の座標は $(-t(\log t - 1), 0)$ である。 $t > 1$ であるから、 $\triangle PQR$ は底辺の長さが

$$t - \{-t(\log t - 1)\} = t \log t$$

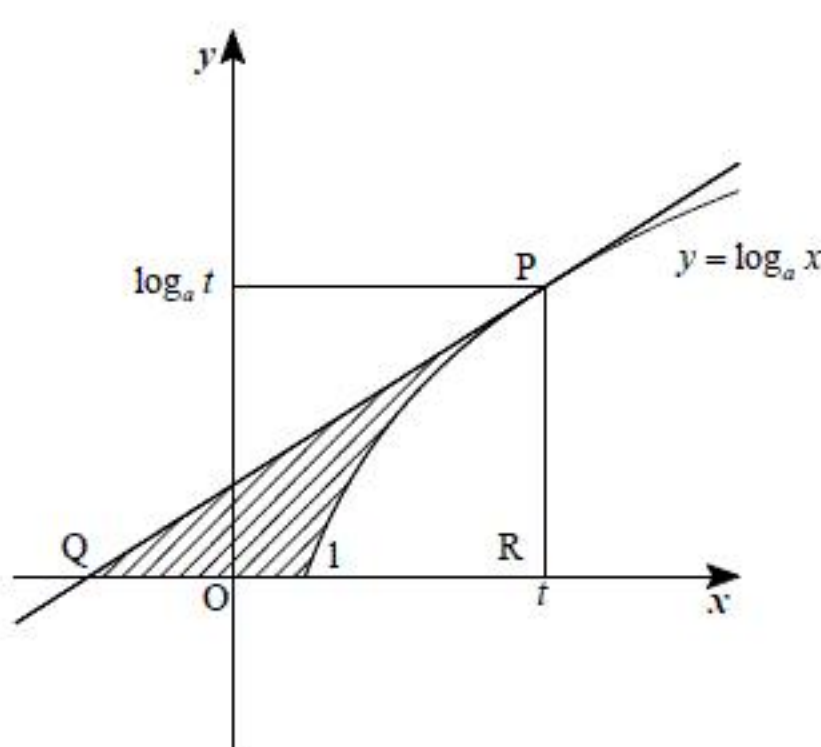
で高さが $\frac{\log t}{\log a}$ の直角三角形であるから

$$\begin{aligned} S_1(t) &= \frac{1}{2} \cdot t \log t \cdot \frac{\log t}{\log a} \\ &= \frac{t(\log t)^2}{2 \log a} \end{aligned}$$

である。

(答) Q の座標: $(-t(\log t - 1), 0)$ 、 $S_1(t) = \frac{t(\log t)^2}{2 \log a}$

(ii)



$S_2(t)$ は、上図斜線部の領域の面積であるから

$$\begin{aligned} S_2(t) &= S_1(t) - \int_1^t \log_a x dx \\ &= \frac{t(\log t)^2}{2 \log a} - \frac{1}{\log a} [x(\log x - 1)]_1^t \\ &= \frac{t(\log t)^2}{2 \log a} - \frac{t \log t - t + 1}{\log a} \\ &= \frac{t(\log t)^2 - t \log t + t - 1}{2 \log a} \end{aligned}$$

となる。

(答) $S_2(t) = \frac{t(\log t)^2 - t \log t + t - 1}{2 \log a}$

(iii)

$$\begin{aligned} \frac{S_2(t)}{S_1(t)} &= \frac{t(\log t)^2 - t \log t + t - 1}{t(\log t)^2} \\ &= 1 - \frac{1}{\log t} + \frac{1}{(\log t)^2} - \frac{1}{t(\log t)^2} \end{aligned}$$

となる。ここで $t \rightarrow \infty$ のとき $\frac{1}{\log t} \rightarrow 0$ 、 $\frac{1}{(\log t)^2} \rightarrow 0$ 、 $\frac{1}{t(\log t)^2} \rightarrow 0$ となるから、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_2(t)}{S_1(t)} = 1$$

を得る。

(答) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_2(t)}{S_1(t)} = 1$

[4]

(1)

$y = x^n$ ($n \geq 2$)について

$$y' = nx^{n-1}$$

$$y'' = n(n-1)x^{n-2}$$

となり、区間 $(0, \infty)$ で $y'' > 0$ であるから、 $y = x^n$ はこの区間で下に凸である。

(証明終)

(2)

曲線 $y = x^n + x^{n-1} + (n-1)x^{n-2}$ が区間 $(-\infty, \infty)$ において下に凸であれば、 n は偶数である

という命題の対偶である

n が奇数であるならば、区間 $(-\infty, \infty)$ において下に凸でない区間が存在する

ことを示す。

$y = x^n + x^{n-1} + (n-1)x^{n-2}$ ($n \geq 2$)について、 $n=3$ のとき

$$y'' = 6x + 2$$

であり、 $(-\infty, \infty)$ において下に凸でない区間が存在する。また、 $n \geq 4$ のとき

$$\begin{aligned} y'' &= n(n-1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} \\ &= (n-1)x^{n-4} \{nx^2 + (n-2)x + (n-2)(n-3)\} \end{aligned}$$

となる。このとき、 $n \geq 4$ より $y = nx^2 + (n-2)x + (n-2)(n-3)$ は下に凸な2次関数であるから、 $x \rightarrow -\infty$ のとき

$$nx^2 + (n-2)x + (n-2)(n-3) > 0$$

を満たす。一方、 $(n-1)x^{n-4}$ は n が奇数であるならば、 $x < 0$ において

$$(n-1)x^{n-4} < 0$$

を満たす。以上より、 n が奇数であるならば、 $x \rightarrow -\infty$ のとき

$$y'' < 0$$

となるので、区間 $(-\infty, \infty)$ において下に凸でない区間が存在する。

以上より、曲線 $y = x^n + x^{n-1} + (n-1)x^{n-2}$ が区間 $(-\infty, \infty)$ において下に凸であれば、 n は偶数であることが示された。

(証明終)

(3)

$f(x) = nx^n$ は $(0, \infty)$ において単調増加である。よって

$$\begin{aligned} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx &> \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} \right) \cdot f\left(\frac{k-1}{n} \right) \\ &= \left(\frac{k-1}{n} \right)^n \end{aligned}$$

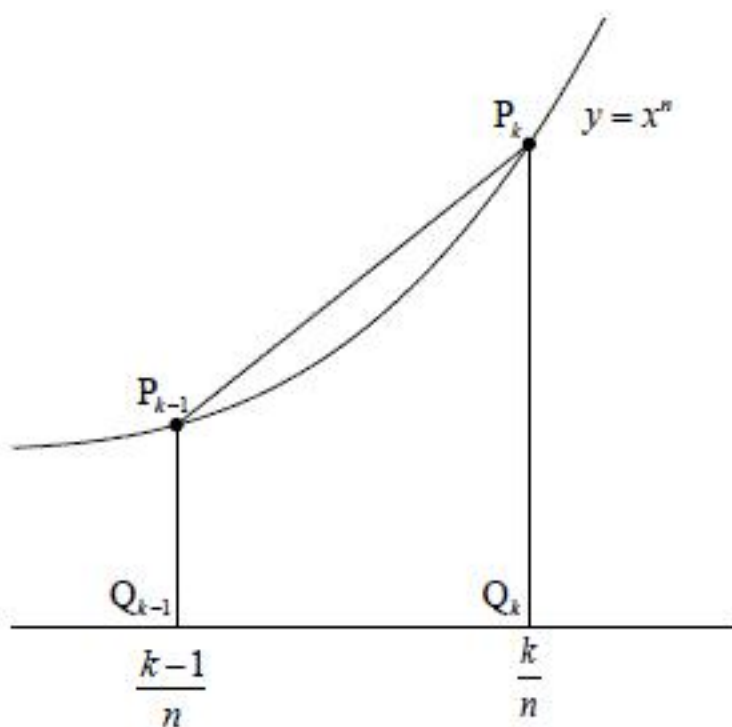
となるから

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n} \right)^n + \left(\frac{n}{n} \right)^n \\ &< \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} nx^n dx + 1 \\ &= \int_0^1 nx^n dx + 1 \\ &= \frac{n}{n+1} + 1 \\ &= \frac{2n+1}{n+1} \\ \Leftrightarrow a_n &< \frac{2n+1}{n+1} \end{aligned}$$

となる。よって題意は示された。

(証明終)

(4)



(1)より $y = x^n$ は $(0, \infty)$ において下に凸であるから、上図のように $(0, \infty)$ では線分 $P_k P_{k-1}$ は端点を除いて $y = x^n$ よりも上にある。よって

$$\begin{aligned} \text{台形 } P_{k-1} Q_{k-1} Q_k P_k \text{ の面積} &> \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} x^n dx \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{k-1}{n} \right)^n + \left(\frac{k}{n} \right)^n \right\} \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} \right) &> \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} x^n dx \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{k-1}{n} \right)^n + \left(\frac{k}{n} \right)^n \right\} &> n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} x^n dx \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{k-1}{n} \right)^n + \left(\frac{k}{n} \right)^n \right\} + \frac{1}{2} &> \frac{n}{n+1} + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^n &> \frac{3n+2}{2n+2} \\ \therefore a_n &> \frac{3n+2}{2n+2} \end{aligned}$$

となる。よって題意は示された。

(証明終)