

〔1〕

(1)

仮定より実数 t を用いて

$$\overrightarrow{AH} = t\vec{u}$$

と表せる。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HB} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AH} \\ &= \vec{a} - t\vec{u}\end{aligned}$$

となる。ここで $\overrightarrow{AH}$ と $\overrightarrow{HB}$ は垂直であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{u}(t\vec{u} - \vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow t - \vec{a} \cdot \vec{u} &= 0 \left(\because |\vec{u}| = 1 \right) \\ \Leftrightarrow t &= k \left(\because \vec{a} \cdot \vec{u} = k \right)\end{aligned}$$

となる。よって

$$\overrightarrow{HB} = \vec{a} - k\vec{u}$$

が示された。

(証明終)

(2)

与式より

$$\begin{aligned}y &= 3(1 - \cos^2 x) + (2\cos^2 x - 1) + \cos x - 3 \\ &= -\cos^2 x + \cos x - 1 \\ &= -\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\end{aligned}$$

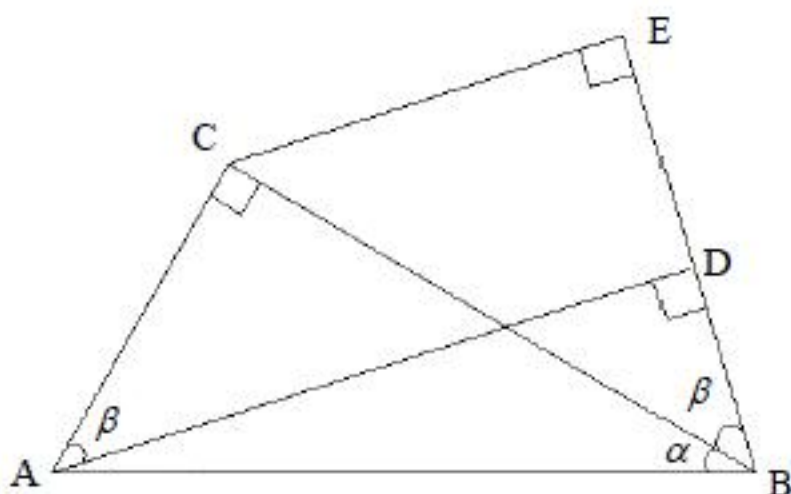
となる。ここで $0 \leq x < 2\pi$ であるから $-1 \leq \cos x \leq 1$ なので y は $\cos x = -1$ 、つまり $x = \pi$ で最小値

$$-\left(-1 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} = -3$$

をとる。また、 $\cos x = \frac{1}{2}$ 、つまり $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$ で最大値 $-\frac{3}{4}$ をとる。

(答) 最大値 $-\frac{3}{4}\left(x = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\right)$ 、最小値 $-3(x = \pi)$

(3)



点 C を通り AD に平行な直線を引き、 BD との交点を E とする。ここで、 $\angle C = \angle D = \frac{\pi}{2}$ より、

点 A, B, C, D は同一円上にあるから

$$\begin{aligned}\angle CAD &= \angle EBC \\ &= \beta\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}BD \tan(\alpha + \beta) &= AD \\ &= AC \cos \beta + CE \\ &= AC \cos \beta + BC \sin \beta\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

[2]

(1)

定義より,

$$\begin{aligned}a_3 &= (1-\alpha) \cdot 1 + \alpha \cdot 0 \\&= 1-\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_4 &= (1-\alpha) \cdot (1-\alpha) + \alpha \cdot 1 \\&= \alpha^2 - \alpha + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_5 &= (1-\alpha) \cdot (\alpha^2 - \alpha + 1) + \alpha \cdot (1-\alpha) \\&= (1-\alpha)(1+\alpha^2)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_3 = 1-\alpha, \quad a_4 = \alpha^2 - \alpha + 1, \quad a_5 = (1-\alpha)(1+\alpha^2)$$

(2)

$$\begin{aligned}a_{n+2} &= (1-\alpha)a_{n+1} + \alpha a_n \\ \Leftrightarrow a_{n+2} + \alpha a_{n+1} &= a_{n+1} + \alpha a_n \\ \Leftrightarrow (a_{n+2} - a_{n+1}) &= -\alpha(a_{n+1} - a_n) \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= -\alpha b_n \\ &= (-\alpha)^n b_1 \\ &= (-\alpha)^n (a_2 - a_1) \\ &= (-\alpha)^n\end{aligned}$$

となるが, これは $n=0$ としても成り立つから

$$b_n = (-\alpha)^{n-1}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b_n = (-\alpha)^{n-1}$$

(3)

(2)より

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= a_1 + \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) \\&= \sum_{k=1}^n b_k \\&= \sum_{k=1}^n (-\alpha)^{k-1} \\&= \frac{1 - (-\alpha)^n}{1 + \alpha}\end{aligned}$$

であり, これは $n=0$ としても成り立つから

$$a_n = \frac{1 - (-\alpha)^{n-1}}{1 + \alpha}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{1 - (-\alpha)^{n-1}}{1 + \alpha}$$

(4)

$(-\alpha)^{n-1} = (-1)^{n-1}(\alpha)^{n-1}$ は $\alpha > 1, \alpha < -1$ のとき発散し, $\alpha = 1, -1$ のとき振動するから収束するので, a_n が収束するとき, $-1 < \alpha < 1$ となる。このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{1+\alpha}$$

となるので, これが $\frac{2}{3}$ に等しいとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\alpha} &= \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

[3]

(1)

$y = ax^2$ から, $y' = 2ax$ であるので, 直線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2at(x-t) + at^2 \\ &= 2atx - at^2 \end{aligned}$$

となる。よって題意は示された。

(証明終)

(2)

$y = 2atx - at^2$ と $y = ax^2 - b$ を連立して整理すると

$$\begin{aligned} 2atx - at^2 &= ax^2 - b \\ \Leftrightarrow ax^2 - 2atx + at^2 - b &= 0 \end{aligned}$$

となるから, 解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2t \\ \alpha\beta = t^2 - \frac{b}{a} \end{cases}$$

となるから

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= 4t^2 - 4 \cdot \left(t^2 - \frac{b}{a} \right) \\ &= \frac{4b}{a} \end{aligned}$$

$$\therefore \beta - \alpha = 2\sqrt{\frac{b}{a}} \quad (\because \beta > \alpha)$$

を得る。よって題意は示された。

(証明終)

(3)

求める面積は

$$\begin{aligned} \int_a^\beta \{ 2atx - at^2 - (ax^2 - b) \} dx &= -a \int_a^\beta (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= -a \int_a^\beta \left\{ (x - \alpha)^2 + (x - \alpha)(\alpha - \beta) \right\} dx \\ &= -a \left[\frac{1}{3}(x - \alpha)^3 - \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(x - \alpha)^2 \right]_a^\beta \\ &= \frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{a}{6} \cdot 8 \cdot \frac{b}{a} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} \\ &= \frac{4b}{3} \sqrt{\frac{b}{a}} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{4b}{3} \sqrt{\frac{b}{a}}$

〔 4 〕

(1)

$$\begin{aligned}a_1 &= \int_0^1 x e^x dx \\&= \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\&= e - \left[e^x \right]_0^1 \\&= e - (e - 1) \\&= 1\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1} e^x dx \\&= \left[x^{n+1} e^x \right]_0^1 - (n+1) \int_0^1 x^n e^x dx \\&= e - (n+1) a_n\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}a_2 &= e - 2 \cdot a_1 \\&= e - 2 \\a_3 &= e - 3 a_2 \\&= e - 3 \{ e - 2 \} \\&= -2e + 6\end{aligned}$$

となる。

(答) $a_1 = 1, a_2 = e - 2, a_3 = -2e + 6$

(2)

(1)で示した通り

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1} e^x dx \\&= \left[x^{n+1} e^x \right]_0^1 - (n+1) \int_0^1 x^n e^x dx \\&= e - (n+1) a_n\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(3)

$0 < x < 1$ で $e^x > 1$ であるから

$$\begin{aligned}x^n e^x &> x^n \quad (0 < x < 1) \\&\Rightarrow \int_0^1 x^n e^x dx > \int_0^1 x^n dx \\&\Rightarrow a_n > \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

となる。また $x^n e^x > 0$ ($0 < x < 1$)であるから、 $a_n > 0$ であるので、(2)の漸化式より

$$\begin{aligned}e - (n+1) a_n &> 0 \\&\Leftrightarrow a_n < \frac{e}{n+1}\end{aligned}$$

となるから、

$$\frac{1}{n+1} < a_n < \frac{e}{n+1}$$

が示された。

(証明終)

ここで

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{n+1} &= 0\end{aligned}$$

であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

を得る。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(4)

(2)より

$$n a_n = e - a_n - a_{n+1}$$

となり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = e$$

を得る。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = e$