

平成19年度入学者選抜試験問題

医学部医学科

数 学

前 期 日 程

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 解答用紙4枚と下書き用紙2枚は問題冊子とは別になっています。
- 3 問題は[1], [2], [3], [4]の4問です。
- 4 問題の解答を、それぞれ対応した番号の解答用紙に書きなさい。
- 5 試験中に問題冊子の印刷不鮮明・落丁・乱丁、解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- 6 監督者の指示にしたがって、4枚の解答用紙それぞれに学部名と**大学受験番号**を正しく記入しなさい。学部名と**大学受験番号**が正しく記入されていない場合は、採点できないことがあります。
- 7 定規は、使用してもかまいません。
- 8 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は持ち帰ってください。

[1] c を正の定数とし、曲線 $y = e^{-cx}$ を考える。ただし、 e は自然対数の底とする。曲線 $y = e^{-cx}$ 上の点

$$P_1(a_1, e^{-ca_1}), P_2(a_2, e^{-ca_2}), \dots, P_n(a_n, e^{-ca_n}), \dots$$

を次のようにとる。 $a_1 = 0$ とする。 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し、 a_{n+1} を曲線 $y = e^{-cx}$ 上の点 P_n における接線と x 軸との交点の x 座標とする。このとき、次の各問に答えよ。

- (1) 曲線 $y = e^{-cx}$ 上の点 $P(a, e^{-ca})$ における接線の方程式を求めよ。さらに、この接線の方程式を $y = g(x)$ とおくと、すべての実数 x に対して、

$$e^{-cx} \geq g(x)$$

が成り立つことを示せ。

- (2) a_{n+1} を c と n を用いて表せ。さらに、曲線 $y = e^{-cx}$ と点 P_n における接線および直線 $x = a_{n+1}$ とで囲まれた図形の面積 S_n を求めよ。

- (3) (2) で求めた S_n に対し、 $A_n = \sum_{k=1}^n S_{2k-1}$, $B_n = \sum_{k=1}^n S_{2k}$ とする。このとき、次の極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - B_n)$$

を求めよ。

[2] A, B を 2 次の正方行列, E を 2 次の単位行列とする. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) 実数 α に対し, $A^2 = \alpha E$ をみたす A をすべて求めよ.

(2) 正の実数 α , 実数 β に対し,

$$A^2 = \alpha E, \quad B^2 = \beta E, \quad AB = -BA$$

をみたす A, B の例を一組あげよ.

(3) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ とする. 負の実数 α に対し,

$$A^2 = \alpha E, \quad AB = -BA$$

をみたす A は存在しないことを示せ.

[3] $a > 1$ とする. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) 関数 $f(x) = \log_x a + \log_a x - 2$ ($x > 0, x \neq 1$) の増減を調べ, 極大値および極小値を求めよ.

(2) 曲線 $y = \log_a x$ ($x > 1$) 上の点 $P(t, \log_a t)$ における接線と x 軸との交点を Q とする. さらに, 点 $R(t, 0)$ とする.

(i) Q の座標および三角形 PQR の面積 $S_1(t)$ を求めよ.

(ii) 曲線 $y = \log_a x$ と P における接線および x 軸で囲まれた図形の面積 $S_2(t)$ を求めよ.

(iii) 次の極限值

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_2(t)}{S_1(t)}$$

を求めよ.

[4] n を 2 以上の自然数とする. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) 曲線 $y = x^n$ は区間 $(0, \infty)$ で下に凸であることを示せ.

(2) 曲線 $y = x^n + x^{n-1} + (n-1)x^{n-2}$ が区間 $(-\infty, \infty)$ で下に凸であれば, n は偶数であることを示せ.

(3) $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^n$ とするとき, $a_n < \frac{2n+1}{n+1}$ が成り立つことを示せ.

(4) (3) の a_n に対して, $a_n > \frac{3n+1}{2n+2}$ が成り立つことを示せ.