

平成 19 年度入学者選抜試験問題

工 学 部

数 学

前 期 日 程

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子の本文は、**1 ページ**から **4 ページ**までです。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明・落丁・乱丁、解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- 4 監督者の指示にしたがって、解答用紙に**大学受験番号**を正しく記入してください。**大学受験番号**が正しく記入されていない場合は、採点できないことがあります。
- 5 解答は、解答用紙の注意事項にしたがって記入してください。また、必要に応じて計算過程も記入してください。
- 6 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は持ち帰ってください。

〔1〕 次の問いに答えよ。

- (1) 空間において、点 A を通り、単位ベクトル $\vec{u}$ に平行な直線 l を考える。直線 l 上にない点 B から l に下ろした垂線を BH とする。 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $k = \vec{a} \cdot \vec{u}$ とするとき、 $\overrightarrow{HB} = \vec{a} - k\vec{u}$ を示せ。
- (2) 関数 $y = 3 \sin^2 x + \cos 2x + \cos x - 3$ ($0 \leq x < 2\pi$) の最大値と最小値を求めよ。
- (3) 辺 AB を共有する $\triangle ABC$ と $\triangle ABD$ において、 $\angle C = \angle D = \frac{\pi}{2}$ で、線分 BC と線分 AD は交わっている。 $\angle ABC = \alpha$, $\angle CBD = \beta$ とするとき、 $BD \tan(\alpha + \beta) = BC \sin \beta + AC \cos \beta$ を示せ。ただし、2点 C, D は相異なるものとする。

〔2〕 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+2} = (1 - \alpha) a_{n+1} + \alpha a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとき、次の問いに答えよ。ただし、 α は $0 < \alpha < 1$ を満たす定数である。

(1) a_3, a_4, a_5 を求めよ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ を数列 $\{a_n\}$ の階差数列とする。すなわち、

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とする。このとき、数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}$ となる α を求めよ。

〔3〕 xy 平面上に 2 曲線 $C_1: y = ax^2$ と $C_2: y = ax^2 - b$ がある。曲線 C_1 上の点 (t, at^2) における接線を l とするとき、次の問いに答えよ。ただし、 a と b は正の定数である。

(1) 直線 l の方程式は $y = 2atx - at^2$ であることを示せ。

(2) 直線 l と曲線 C_2 との交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とするとき、

$\beta - \alpha = 2\sqrt{\frac{b}{a}}$ であることを示せ。

(3) 直線 l と曲線 C_2 とで囲まれた図形の面積 S を求めよ。

[4] $a_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定義される数列 $\{a_n\}$ について、次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。

(1) a_1, a_2, a_3 を求めよ。

(2) $a_{n+1} = e - (n+1)a_n$ を示せ。

(3) $\frac{1}{n+1} < a_n < \frac{e}{n+1}$ を示し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ を求めよ。