[1]

(1)

$$
\begin{aligned}
&\log_{10}175+2\log_{10}\frac{5}{7}-\frac{2}{3}\log_{10}\frac{125}{8}-\log_{10}\frac{1}{7}\\
&=\log_{10}7\cdot 5^2+2\log_{10}5-2\log_{10}7-\frac{2}{3}\log_{10}5^3+\frac{2}{3}\log_{10}2^3+\log_{10}7\\
&=(1-2+1)\log_{10}7+(2+2-2)\log_{10}5+2\log_{10}2\\
&=2(\log_{10}5+\log_{10}2)\\
&=2\log_{10}10\\
&=2
\end{aligned}
$$

となる。

(答) 2

(2)

$3^x=t(t>0)$ とおき与式を整理すると

$$
\begin{aligned}
&9t-2\frac{1}{t}+17=0\\
&\Rightarrow 9t^2+17t-2=0\\
&\Leftrightarrow (9t-1)(t+2)=0\\
&\therefore t=\frac{1}{9}(\because t>0)
\end{aligned}
$$

を得る。よって

$$
\begin{aligned}
&3^x=\frac{1}{9}\\
&\therefore x=-2
\end{aligned}
$$

となる。

(答) $x=-2$

(3)

$x\neq 1$ から $\log_a x\neq 0$ であり，与式より

$$
\begin{aligned}
&2\log_a x+9\log_x a\geqq 9\\
&\Leftrightarrow 2\log_a x+\frac{9}{\log_a x}\geqq 9 \qquad \cdot\cdot\cdot ①
\end{aligned}
$$

となる。ここで $\log_a x=X(\neq 0)$ とおくと①式は

$$2X+\frac{9}{X}\geqq 9$$

となる。両辺に X^2 をかけて整理すると

$$
\begin{aligned}
&2X^3+9X\geqq 9X^2\\
&\Leftrightarrow 2X^3-9X^2+9X\geqq 0\\
&\Leftrightarrow X(2X-3)(X-3)\geqq 0\\
&\therefore 0<X\leqq\frac{3}{2},\ X\geqq 3
\end{aligned}
$$

を得る。$\log_a x=X$ かつ $0<a<1$ かつ $x>0$ であるから

$$a^{\frac{3}{2}}\leqq x<1,\ 0<x\leqq a^3$$

となる。

(答) $a^{\frac{3}{2}}\leqq x<1,\ 0<x\leqq a^3$

[2]

(1)

2 つの方程式

$$\begin{cases} 3x+2y=22 \\ x+4y=24 \end{cases}$$

を連立して解いて

$$(x, y)=(4, 5)$$

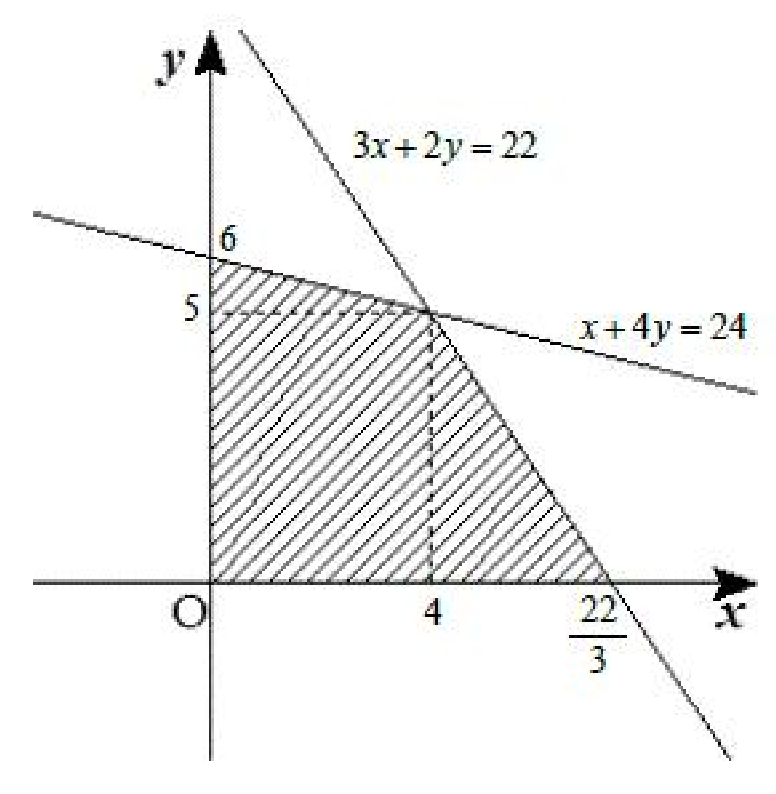
を得る。

(答) $(4, 5)$

(2)

$$\begin{cases} 3x+2y \leqq 22 \\ x+4y \leqq 24 \\ x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \end{cases}$$

が表す領域は下図の通り。ただし境界は全て含む。

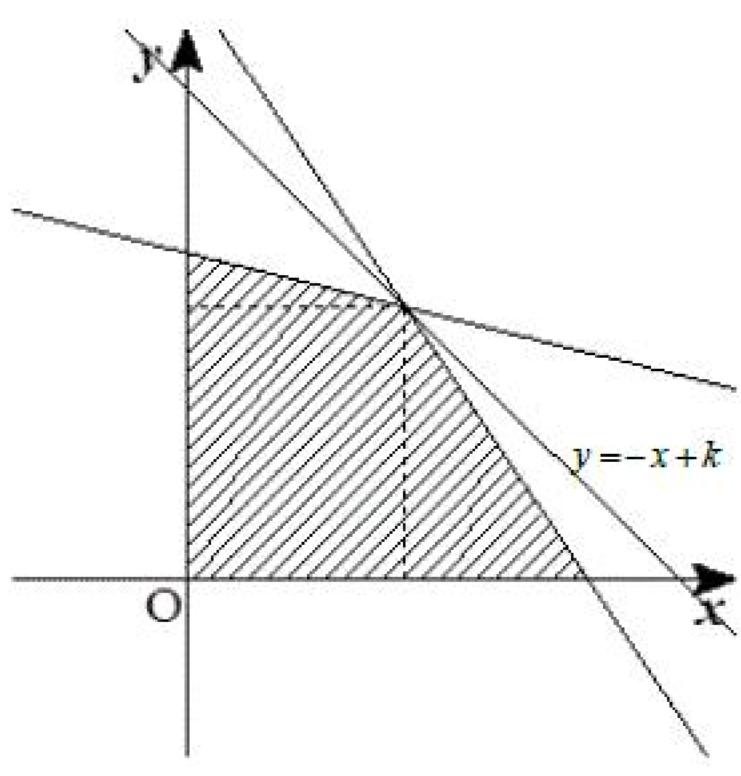


(答) 前図(境界は全て含む)

(3)

(i)

$x+y=k$ とおくと，k は直線 $y=-x+k$ の y 切片を表す。よって k が最大になるのは，下図のように直線 $y=-x+k$ が領域 D 内の点 $(4, 5)$ を通るときである。



この時の k の値は

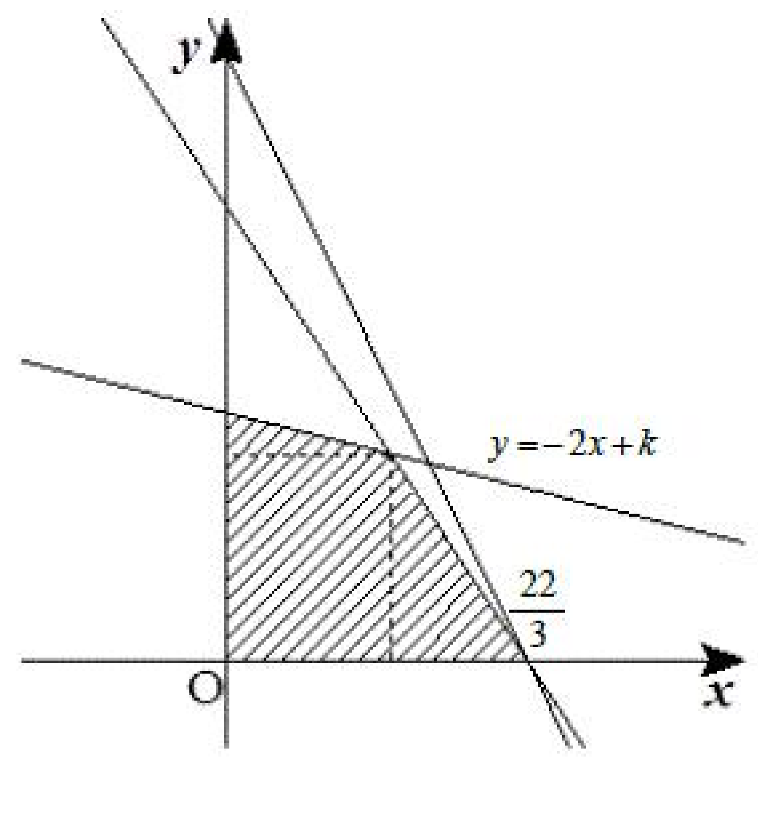
$$k=4+5=9$$

であるから，$x+y$ の最大値は 9，$(x, y)=(4, 5)$ である。

(答) $x+y$ の最大値:9，$(x, y)=(4, 5)$

(ii)

$2x+y=k$ とおくと，k は直線 $y=-2x+k$ の y 切片を表す。よって k が最大になるのは，下図のように直線 $y=-x+k$ が領域 D 内の点 $\left(\frac{22}{3}, 0\right)$ を通るときである。



この時の k の値は

$$k=2\cdot\frac{22}{3}+0=\frac{44}{3}$$

であるから，$x+y$ の最大値は $\frac{44}{3}$，$(x, y)=\left(\frac{22}{3}, 0\right)$ である。

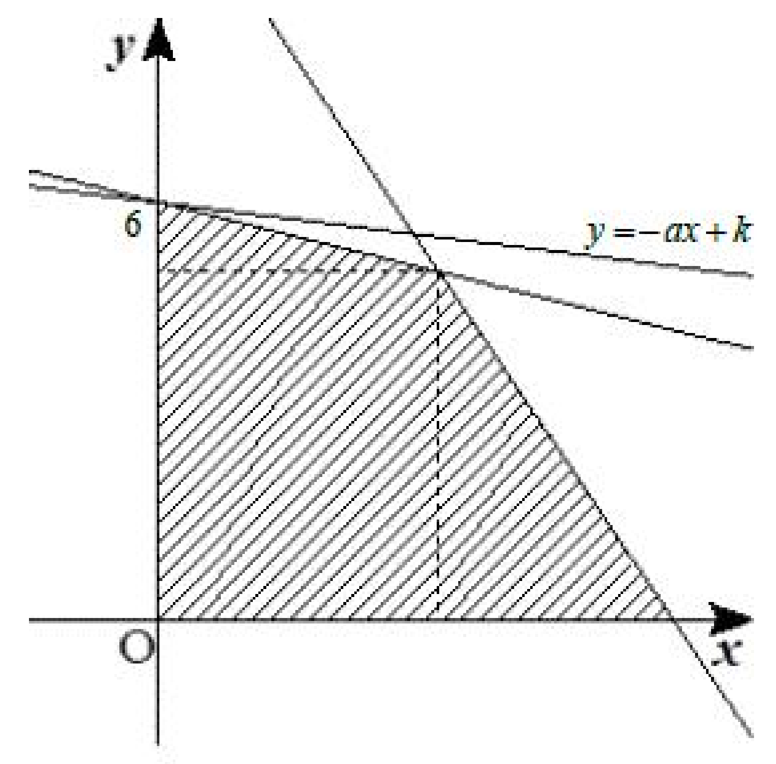
(答) $x+y$ の最大値: $\frac{44}{3}$，$(x, y)=\left(\frac{22}{3}, 0\right)$

(iii)

$ax+y=k$ とおき，(i)と同様に考える。

[1] $0<a<\frac{1}{4}$ のとき

下図のように，$y=-ax+k$ が点 $(0, 6)$ を通るときに k は最大値を取る。



この時の k の値は

$$k=a\cdot 0+6=6$$

であるから，$ax+y$ の最大値は 6，$(x, y)=(0, 6)$ である

[2] $\frac{1}{4} \leqq a \leqq \frac{3}{2}$ のとき

$y=-ax+k$ が点 $(4, 5)$ を通るとき，k は最大値

$$a\cdot 4+5=4a+5$$

を取る。

[3] $a>\frac{3}{2}$ のとき

$y=-ax+k$ が点 $\left(\frac{22}{3}, 0\right)$ を通るとき，k は最大値

$$a\cdot\frac{22}{3}+0=\frac{22}{3}a$$

を取る。

以上をまとめると $ax+y$ の最大値は

$$\begin{cases} 0<a<\frac{1}{4} \text{ のとき } 6 \\ \frac{1}{4} \leqq a \leqq \frac{3}{2} \text{ のとき } 4a+5 \\ a>\frac{3}{2} \text{ のとき } \frac{22}{3}a \end{cases}$$

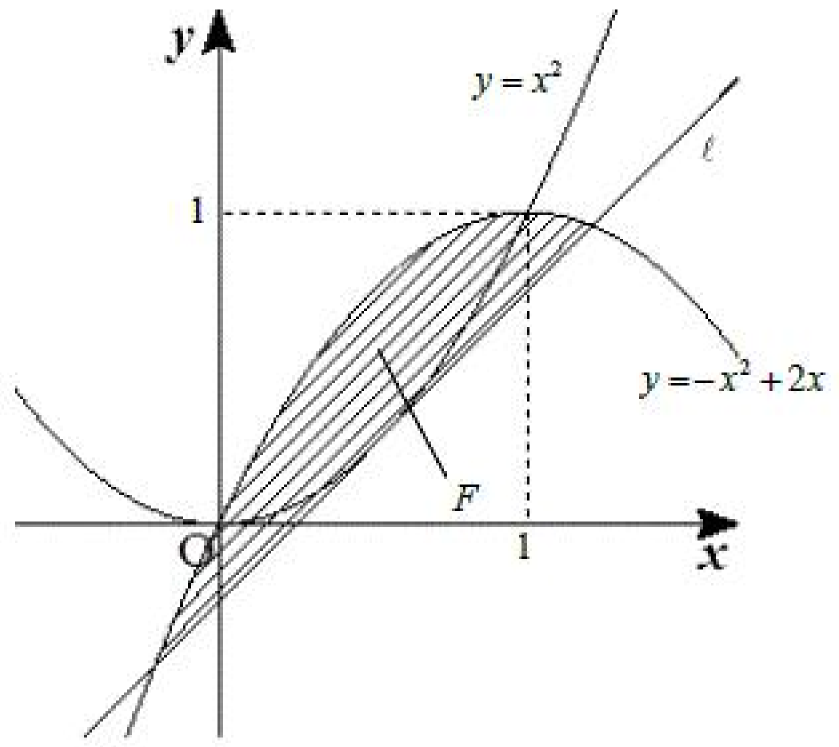
である。

(答) $\begin{cases} 0<a<\frac{1}{4} \text{ のとき } 6 \\ \frac{1}{4} \leqq a \leqq \frac{3}{2} \text{ のとき } 4a+5 \\ a>\frac{3}{2} \text{ のとき } \frac{22}{3}a \end{cases}$

[3]

(1)

仮定より下図の通りである。(Fは斜線部の領域)



(答) 上図

(2)

C_1について

$$y'=2x$$

であるから，ℓの方程式は

$$y=2a(x-a)+a^2$$
$$=2ax-a^2$$

となる。

(答) $y=2ax-a^2$

(3)

$y=-x^2+2x$に$y=2ax-a^2$を代入して整理すると

$$2ax-a^2=-x^2+2x$$
$$\Leftrightarrow x^2+2(a-1)x-a^2=0$$
$$\therefore x=-a+1\pm\sqrt{2a^2-2a+1}$$

であるから

$$\alpha=-a+1-\sqrt{2a^2-2a+1},\ \beta=-a+1+\sqrt{2a^2-2a+1}$$

である。

(答) $\alpha=-a+1-\sqrt{2a^2-2a+1},\ \beta=-a+1+\sqrt{2a^2-2a+1}$

(4)

(3)より，面積公式から，

$$S=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$
$$=\frac{1}{6}\left\{a-1+\sqrt{2a^2-2a+1}-\left(a-1-\sqrt{2a^2-2a+1}\right)\right\}^3$$
$$=\frac{4\left(2a^2-2a+1\right)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

となる。

(答) $\dfrac{4\left(2a^2-2a+1\right)^{\frac{3}{2}}}{3}$

(5)

(4)より

$$S=\frac{4\left(2a^2-2a+1\right)^{\frac{3}{2}}}{3}$$
$$=\frac{4\left\{2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right\}^{\frac{3}{2}}}{3}$$

であるから，Sは$a=\dfrac{1}{2}$のとき最小値

$$\frac{4\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

を取る。

(答) 最小値$\dfrac{\sqrt{2}}{3}\left(a=\dfrac{1}{2}\right)$