〔1〕

(1)

$x=20.0\dot{8}$ とおくと

$$10x-x=200.\dot{8}-20.0\dot{8}$$
$$\Leftrightarrow 9x=180.8$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{9}\cdot\frac{1808}{10}$$
$$\therefore x=\frac{904}{45}$$

である。

(答) $\dfrac{904}{45}$

(2)

$2^{3-x}>0,\ 2^{1+x}>0$ であるから，相加相乗平均の関係より

$$y=2^{3-x}+2^{1+x}\geqq 2\sqrt{2^{3-x}+2^{1+x}}=8$$

である。等号成立は

$$2^{3-x}=2^{1+x}$$
$$\Leftrightarrow 3-x=1+x$$
$$\therefore x=1$$

である。よって最小値は $x=1$ のとき 8。

(答) 最小値は $8(x=1)$

(3)

$$\begin{aligned}(x^2+xy+y^2)(x^2+y^2)(x-y)^2(x+y)&=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x-y)(x+y)(x^2+y^2)\\&=(x^3-y^3)(x^4-y^4)\\&=x^7-y^3x^4-y^4x^3+y^7\end{aligned}$$

となる。

(答) $x^7-y^3x^4-y^4x^3+y^7$

〔2〕

(1)

仮定より

$$A\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{12}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$$

となる。B も同様にして

$$B\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 8 & -4\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow B=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 8 & -4\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{12}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}$$

$$\therefore B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

となる。

(答) $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

(2)

$\det(B)=-2\neq 0$ であるので，$AB=BC$ の両辺に左から B^{-1} を乗じて

$$C=B^{-1}AB$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

となる。

(証明終)

(3)

(2)より

$$A^n=B\left(B^{-1}AB\right)^nB^{-1}$$

$$=BC^nB^{-1}$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2^n} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2^n} & 0\\ 1-\frac{1}{2^n} & 1\end{pmatrix}$$

となる。

(答) $A^n=\begin{pmatrix}\frac{1}{2^n} & 0\\ 1-\frac{1}{2^n} & 1\end{pmatrix}$

(4)

$$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2^n} & 0\\ 1-\frac{1}{2^n} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2^{n-1}}\\ 3-\frac{1}{2^{n-1}}\end{pmatrix}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}x_n=0,\ \lim_{n\to\infty}y_n=3$$

となる。

(答) $\lim_{n\to\infty}x_n=0,\ \lim_{n\to\infty}y_n=3$

〔３〕

(1)

仮定より $a_n>0$ であるから $S_n>0$ となる。ここで $a_1=S_1$ であるから

$$S_1=\frac{1}{2}\left(S_1+\frac{2}{S_1}\right)$$
$$\Leftrightarrow S_1^2-2=0$$
$$\therefore S_1=\sqrt{2}\ (\because S_1>0)$$

となる。また $n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}S_{n-1}&=S_n-a_n\\&=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{2n}{a_n}\right)\end{aligned}$$

であるから

$$S_n+S_{n-1}=\frac{2n}{a_n}$$

となるので

$$\begin{aligned}S_n^2-S_{n-1}^2&=\left(S_n+S_{n-1}\right)\left(S_n-S_{n-1}\right)\\&=\frac{2n}{a_n}\cdot a_n\\&=2n\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

$n=1$ のときは $S_1=\sqrt{2}=\sqrt{1\cdot 2}$ でなりたつ。$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}S_n^2&=\sum_1^{n-1}\left(S_{i+1}^2-S_i^2\right)+S_1^2\\&=\sum_1^{n-1}2(i+1)+2\\&=n(n-1)+2(n-1)+2\\&=n(n+1)\end{aligned}$$

$$\therefore S_n=\sqrt{n(n+1)}\ (\because S_n>0)$$

となる。よって題意は示された

(証明終)

(3)

$n=1$ のときは

$$\begin{aligned}a_1&=S_1\\&=\sqrt{2}\\&=\sqrt{1}\left(\sqrt{1+1}-\sqrt{1-1}\right)\end{aligned}$$

でなりたつ。$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{n(n-1)}\\&=\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\end{aligned}$$

となるから題意は示された。また

$$\begin{aligned}a_n&=\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\\&=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}\\&\to 1\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=1$$

となる。

(答) $\lim_{n\to\infty}a_n=1$

〔4〕

(1)

仮定より

$$\begin{aligned}a_1&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx\\&=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=1\end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned}a_2&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx\\&=\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

となる。

(答) $a_1=1,\ a_2=\dfrac{\pi}{4}$

(2)

部分積分法によって

$$\begin{aligned}a_{n+2}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+2} x dx\\&=\left[\sin x\cos^{n+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^n x dx\\&=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2 x\right)\cos^n x dx\\&=(n+1)\left(a_n-a_{n+2}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore a_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}a_n$$

となる。よって題意は示された。

(証明終)

(3)

$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}b_n&=(n+1)a_{n+1}a_n\\&=(n+1)\cdot\frac{n}{n+1}a_{n-1}a_n\\&=na_na_{n-1}\\&=b_{n-1}\\&=b_1\\&=2\cdot a_2\cdot a_1\\&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ のときも成り立つ。よって題意は示された。

(証明終)

(4)

$$\sqrt{\frac{n\pi}{2(n+1)}}<\sqrt{n}\,a_n<\sqrt{\frac{\pi}{2}}\quad\cdot\cdot\cdot①$$

とする。$n=1$ のとき，

$$\sqrt{\frac{\pi}{4}}<\sqrt{1}\cdot 1<\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

から①式は満たされる。$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $0<\cos x<1$ であるから

$$\begin{aligned}&\cos^n x>\cos^{n+1} x\\&\Leftrightarrow a_n>a_{n+1}\end{aligned}$$

である。よって $n\geqq 2$ のとき，$a_n<a_{n-1}$ の両辺に na_n をかけると

$$na_n^{\ 2}<na_na_{n-1}=b_{n-1}=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \sqrt{n}\,a_n<\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

である。また，$a_{n+1}<a_n$ の両辺に $(n+1)a_n$ をかけると

$$\begin{aligned}&(n+1)a_{n+1}a_n=b_n=\frac{\pi}{2}<(n+1)a_n^{\ 2}\\&\Leftrightarrow \frac{n\pi}{2(n+1)}<na_n^{\ 2}\\&\therefore \sqrt{n}\,a_n>\sqrt{\frac{n\pi}{2(n+1)}}\end{aligned}$$

である。よって①式は示された。したがって

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n\pi}{2(n+1)}}&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}\\&=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

であることより，①とはさみうちの原理から，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,a_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

である。

(答) $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$