

[1]

(1) $\triangle ABC$ に余弦定理をもちいて

$$\cos \theta = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{3}{4}$$

 $\angle A$ は鋭角なので $\sin \theta > 0$

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \dots(\text{答})$$

加法定理より

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \dots(\text{答}) \end{aligned}$$

$$(2) \quad S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle A$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}$$

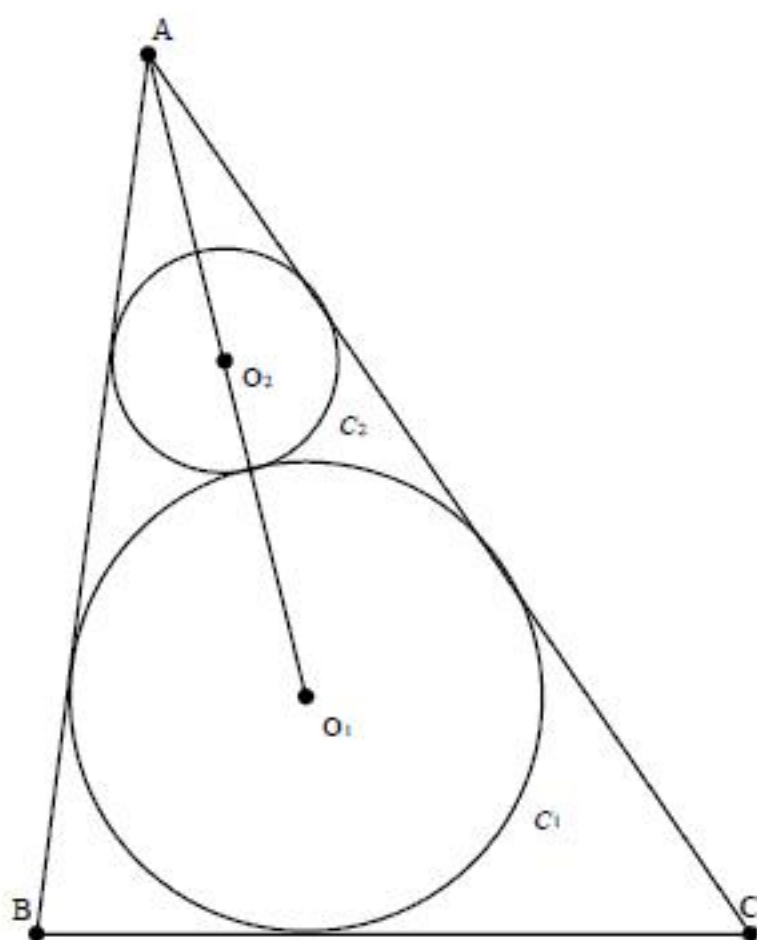
$$= \frac{15\sqrt{7}}{4} \quad \dots(\text{答})$$

$$(3) \quad S = \frac{1}{2} r_1 (AB + BC + CA)$$

より

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{2 \cdot \frac{15\sqrt{7}}{4}}{5 + 4 + 6} \\ &= \frac{\sqrt{7}}{2} \quad \dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(4)

上図のように円 C_1, C_2 の中心をそれぞれ O_1, O_2 とおく。 O_1, O_2 は $\angle A$ の二等分線上にあり, $AO_1 = x, AO_2 = y$ とおくと

$$\frac{r_1}{x} = \frac{r_2}{y} = \sin \frac{\theta}{2} \quad \dots\textcircled{1}$$

$$x = y + r_1 + r_2 \quad \dots\textcircled{2}$$

となり, ①より

$$x = \frac{4}{\sqrt{2}} r_1 \quad \dots\textcircled{3}$$

$$y = \frac{4}{\sqrt{2}} r_2 \quad \dots\textcircled{4}$$

③, ④を②に代入して

$$\frac{4}{\sqrt{2}} r_1 = \frac{4}{\sqrt{2}} r_2 + r_1 + r_2$$

$$\therefore r_2 = \frac{\sqrt{2}}{4 + \sqrt{2}} \cdot \frac{4 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot r_1$$

よって

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{\sqrt{2}}{4 + \sqrt{2}} \cdot \frac{4 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} \\ &= \frac{9\sqrt{7} - 4\sqrt{14}}{14} \quad \dots(\text{答}) \end{aligned}$$

[2]

(1)

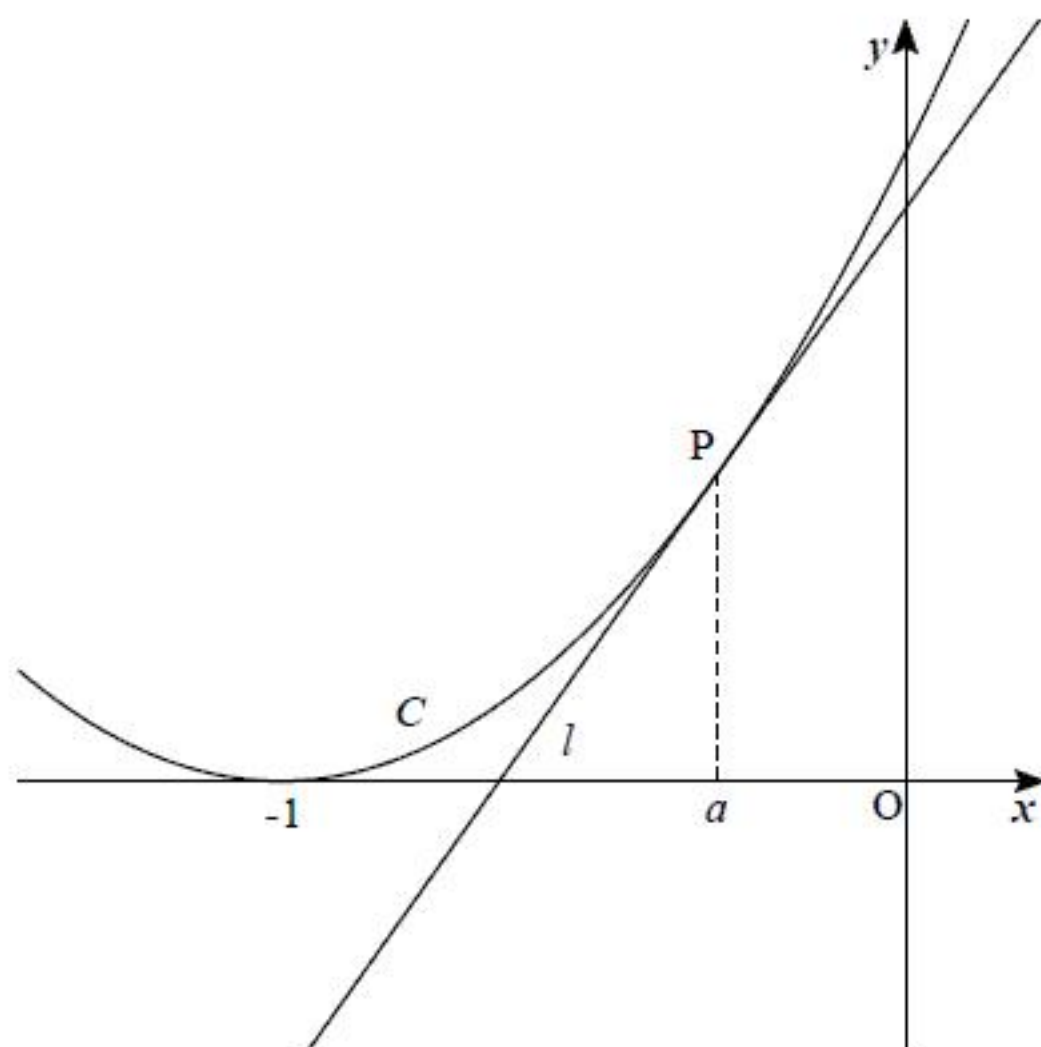
$$y' = 2(x+1)$$

より直線 l の方程式は

$$y - (a^2 + 2a + 1) = 2(a+1)(x - a)$$

$$\therefore y = 2(a+1)x - a^2 + 1 \quad \cdots(\text{答})$$

(2)



(3)

$$P(a, (a+1)^2), Q(b, 2(a+1)b - a^2 + 1)$$

$PQ = \sqrt{3}$ より

$$(b - a)^2 + \{2(a+1)b - 2a^2 - 2a\}^2 = 3$$

整理して

$$(b - a)^2 = \frac{3}{4(a+1)^2 + 1}$$

$b > a$ なので

$$b = a + \sqrt{\frac{3}{4(a+1)^2 + 1}} \quad \cdots(\text{答})$$

(4)

$$S = \int_a^b (x^2 + 2x + 1 - 2(a+1)x + a^2 - 1) dx$$

$$= \int_a^b (x - a)^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}(b - a)^3$$

$$= \frac{1}{3} \left(\sqrt{\frac{3}{4(a+1)^2 + 1}} \right)^3 \quad \cdots(\text{答})$$

(5)

(4)の結果より, S が最大となるのは

$$4(a+1)^2 + 1$$

が最小となるとき。

よって S は

$$a = -1 \quad \cdots(\text{答})$$

のとき最大値

$$S = \sqrt{3} \quad \cdots(\text{答})$$

をとる。

[3]

(1)

条件(b)より

$$\overline{OX_{i+1}} - \frac{1}{8} \overline{OX_i} = \frac{1}{2} \overline{OA} + \frac{1}{4} \overline{OB} + \frac{1}{8} \overline{OC} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{2} \overline{OA} + \frac{1}{4} \overline{OB} + \frac{1}{8} \overline{OC} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4} \right)$$

なので、①において $i=0$ とする

$$\overline{OX_1} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4} \right) \quad \cdots (\text{答})$$

(2)

$$\overline{OX_i} = (x_i, y_i)$$

とおくと、①より

$$\begin{cases} x_i - \frac{1}{8} x_{i-1} = \frac{3}{2} \\ y_i - \frac{1}{8} y_{i-1} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} x_i - \frac{12}{7} = \frac{1}{8} \left(x_{i-1} - \frac{12}{7} \right) \\ y_i - \frac{6}{7} = \frac{1}{8} \left(y_{i-1} - \frac{6}{7} \right) \end{cases}$$

となり

$$\begin{cases} x_i = \frac{12}{7} \left(1 - \left(\frac{1}{8} \right)^i \right) \\ y_i = \frac{6}{7} \left(1 - \left(\frac{1}{8} \right)^i \right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{X_{i-1}X_i} &= \overline{OX_i} - \overline{OX_{i-1}} \\ &= \left(12 \left(\frac{1}{8} \right)^i, 6 \left(\frac{1}{8} \right)^i \right) \end{aligned}$$

$$\therefore |\overline{X_{i-1}X_i}| = 6\sqrt{5} \left(\frac{1}{8} \right)^i \quad \cdots (\text{答})$$

(3)

(2)の結果より

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\overline{X_{i-1}X_i}| &= \sum_{i=1}^n 6\sqrt{5} \left(\frac{1}{8} \right)^i \\ &= 6\sqrt{5} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{8} \right)^n}{1 - \frac{1}{8}} \\ &= \frac{6\sqrt{5}}{7} \left(1 - \left(\frac{1}{8} \right)^n \right) \end{aligned}$$

…(答)