

[1]

(1) $\triangle ABC$ に余弦定理をもちいて

$$\cos \theta = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{3}{4}$$

$\angle A$ は鋭角なので $\sin \theta > 0$

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \dots(\text{答})$$

加法定理より

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned} \quad \dots(\text{答})$$

(2)
$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle A$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}$$

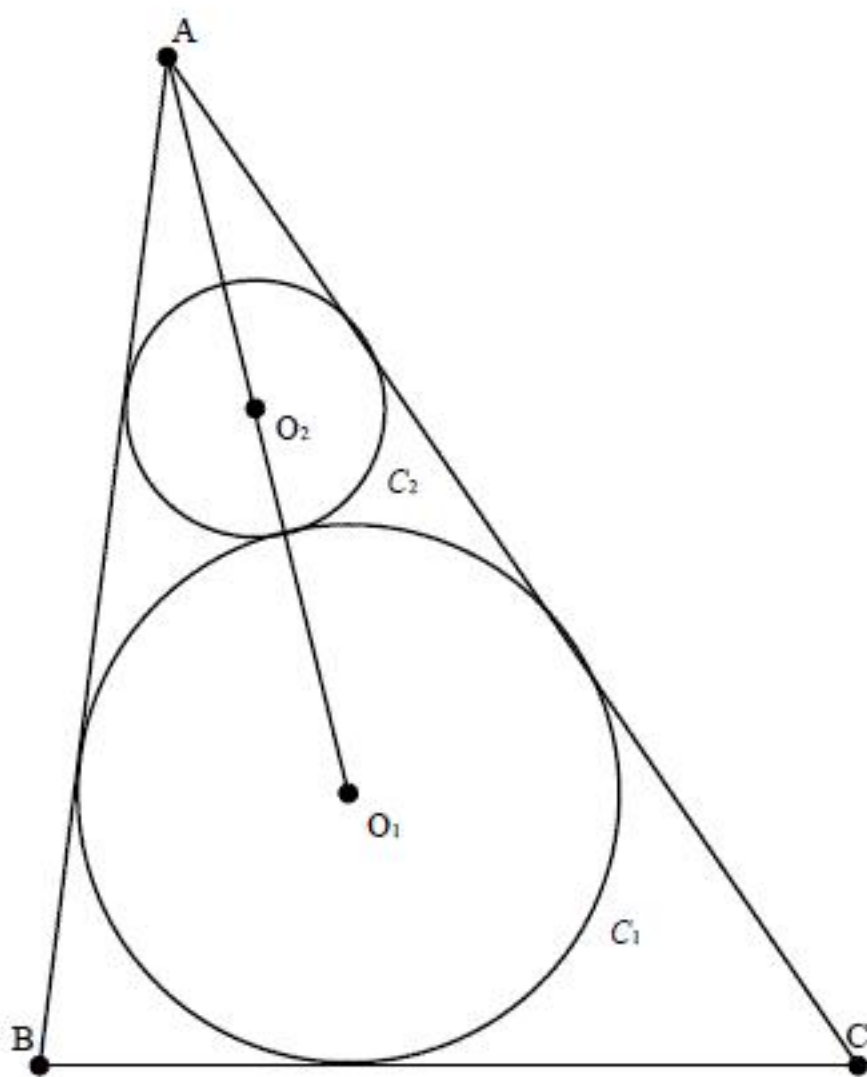
$$= \frac{15\sqrt{7}}{4} \quad \dots(\text{答})$$

(3)
$$S = \frac{1}{2} r_1 (AB + BC + CA)$$

より

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{2 \cdot \frac{15\sqrt{7}}{4}}{5 + 4 + 6} \\ &= \frac{\sqrt{7}}{2} \end{aligned} \quad \dots(\text{答})$$

(4)



上図のように円 C_1, C_2 の中心をそれぞれ O_1, O_2 とおく。
 O_1, O_2 は $\angle A$ の二等分線上にあり, $AO_1 = x, AO_2 = y$ とおくと

$$\frac{r_1}{x} = \frac{r_2}{y} = \sin \frac{\theta}{2} \quad \dots①$$

$$x = y + r_1 + r_2 \quad \dots②$$

となり, ①より

$$x = \frac{4}{\sqrt{2}} r_1 \quad \dots③$$

$$y = \frac{4}{\sqrt{2}} r_2 \quad \dots④$$

③, ④を②に代入して

$$\frac{4}{\sqrt{2}} r_1 = \frac{4}{\sqrt{2}} r_2 + r_1 + r_2$$

$$\therefore r_2 = \frac{\sqrt{2}}{4 + \sqrt{2}} \cdot \frac{4 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot r_1$$

よって

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{\sqrt{2}}{4 + \sqrt{2}} \cdot \frac{4 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} \\ &= \frac{9\sqrt{7} - 4\sqrt{14}}{14} \end{aligned} \quad \dots(\text{答})$$

[2]

(1) 条件(b)より

$$\overrightarrow{OX_{i+1}} - \frac{1}{8}\overrightarrow{OX_i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OC} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OC} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

なので、①において $i=0$ として

$$\overrightarrow{OX_1} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right) \quad \dots(\text{答})$$

(2) $\overrightarrow{OX_i} = (x_i, y_i)$

とおくと、①より

$$\begin{cases} x_i - \frac{1}{8}x_{i-1} = \frac{3}{2} \\ y_i - \frac{1}{8}y_{i-1} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} x_i - \frac{12}{7} = \frac{1}{8}\left(x_{i-1} - \frac{12}{7}\right) \\ y_i - \frac{6}{7} = \frac{1}{8}\left(y_{i-1} - \frac{6}{7}\right) \end{cases}$$

となり

$$\begin{cases} x_i = \frac{12}{7}\left(1 - \left(\frac{1}{8}\right)^i\right) \\ y_i = \frac{6}{7}\left(1 - \left(\frac{1}{8}\right)^i\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{X_{i-1}X_i} &= \overrightarrow{OX_i} - \overrightarrow{OX_{i-1}} \\ &= \left(12\left(\frac{1}{8}\right)^i, 6\left(\frac{1}{8}\right)^i\right) \end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{X_{i-1}X_i}| = 6\sqrt{5}\left(\frac{1}{8}\right)^i \quad \dots(\text{答})$$

(3) (2)の結果より

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\overrightarrow{X_{i-1}X_i}| &= \sum_{i=1}^n 6\sqrt{5}\left(\frac{1}{8}\right)^i \\ &= 6\sqrt{5} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^n}{1 - \frac{1}{8}} \\ &= \frac{6\sqrt{5}}{7}\left(1 - \left(\frac{1}{8}\right)^n\right) \end{aligned}$$

…(答)

[3]

(1) P は放物線 $y = x^2$ 上の点なので $P(t, t^2)$ とおける。

$Q(x_0, y_0)$ とおくと、

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} x_0 = at + bt^2 \\ y_0 = ct + dt^2 \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

よって、Q が x 軸上にあるとき

$$\begin{aligned} y_0 &= ct + dt^2 = 0 \\ \therefore t(c + dt) &= 0 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

(i) $d = 0$ のとき

このとき②より

$$ct = 0$$

ここで $c = 0$ とすると、 $ad - bc = 0$ となり不適。

よって $t = 0$ で、 $P(0, 0)$

(ii) $d \neq 0$ のとき

このとき②より

$$t = 0, -\frac{c}{d}$$

よって P は $(0, 0), \left(-\frac{c}{d}, \frac{c^2}{d^2}\right)$

以上(i),(ii)より

$$(0, 0), \left(-\frac{c}{d}, \frac{c^2}{d^2}\right) \quad \dots(\text{答})$$

(2) ①より、Q が放物線 $y = x^2$ 上にあるとき

$$ct + dt^2 = (at + bt^2)^2$$

整理して

$$b^2t^4 + 2abt^3 + (a^2 - d)t^2 - ct = 0$$

これが任意の t について成立すればよく、その条件は

$$\begin{cases} b^2 = 0 \\ 2ab = 0 \\ a^2 - d = 0 \\ -c = 0 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} b = c = 0 \\ d = a^2 \neq 0 \end{cases} \quad \dots(\text{答})$$

(3) $R(x_1, y_1)$ とおく。放物線 $y = x^2$ 上にあるとき

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & (b+a)d \\ c(a+d) & d^2 + b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって、R が放物線 $y = x^2$ 上にあるとき、(2)の結果より

$$b(a+d) = c(a+d) = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$d^2 + bc = (a^2 + bc)^2 \neq 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

④に $a = 2$ を代入して整理すると

$$(bc)^2 + 7bc + 16 - d^2 = 0 \quad \dots \textcircled{5}$$

(i) $a + d = 0$ のとき

このとき $a = 2$ なので $d = -2$

よって⑤より

$$(bc + 3)(bc + 4) = 0$$

$$\therefore bc = -3, -4$$

$$ad - bc = -4 - bc \neq 0$$

なので

$$bc \neq -4$$

すなわち

$$bc = -3$$

$$\therefore ad - bc = -4 - (-3) = -1$$

(ii) $a + d \neq 0$ のとき

このとき③より $b = c = 0$

これを⑤に代入して

$$16 - d^2 = 0$$

$$\therefore d = \pm 4$$

$$\therefore ad - bc = 2 \cdot (\pm 4) = \pm 8$$

以上(i),(ii)より

$$ad - bc = -1, \pm 8 \quad \dots(\text{答})$$

[4]

(1) 加法定理より

$$y = 2\cos^2\theta + 2\sin\theta - 2$$

また, $0 \leq \theta \leq \pi$ より $\sin\theta \geq 0$

よって

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

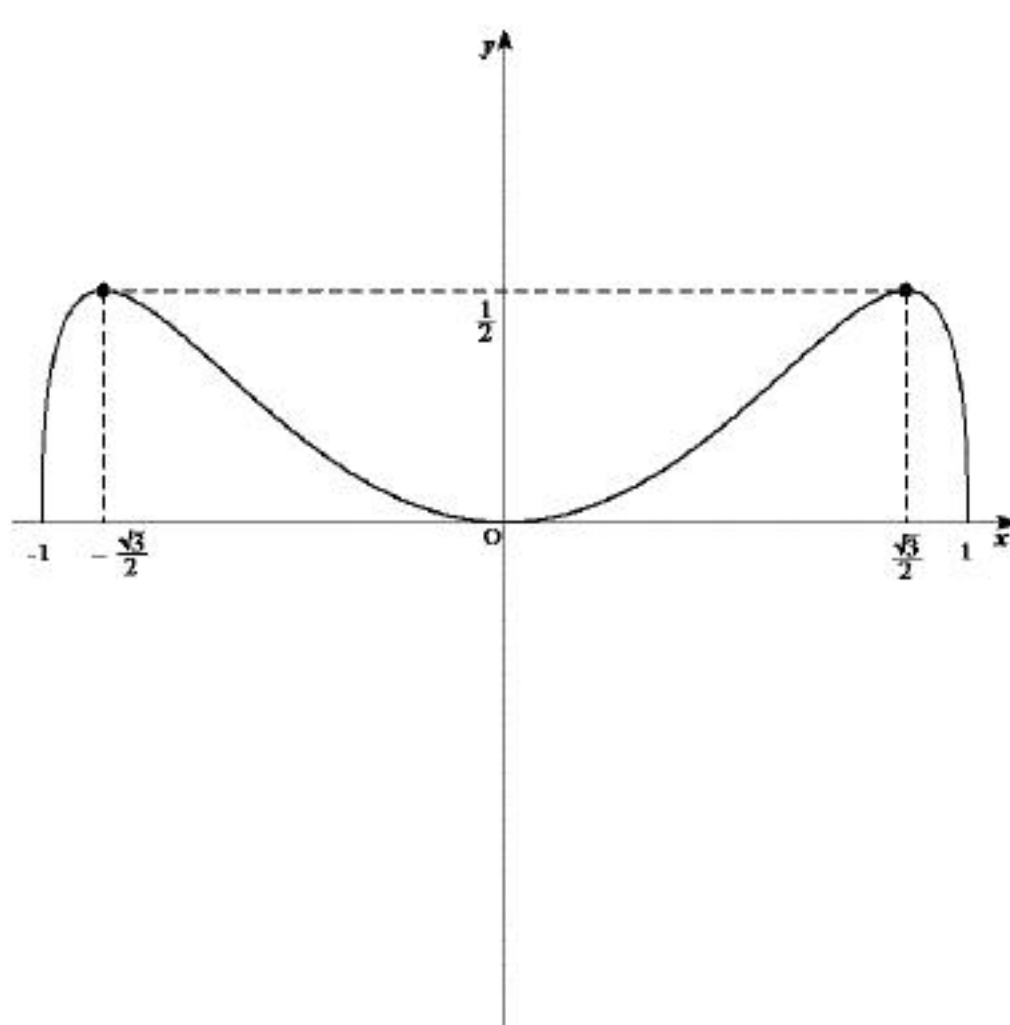
$$\therefore y = 2x^2 + 2\sqrt{1-x^2} - 2$$

…(答)

$$(2) \quad y' = 4x + \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x(2\sqrt{1-x^2} - 1)}{\sqrt{1-x^2}}$$

より, 増減表は下のようになる。

x	-1		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1
$f'(x)$	$+\infty$	+	0	-	0	+	0	-	$-\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

これより, $y = f(x)$ のグラフは下のようになる。(3) $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ より $\sin\theta \leq 0$

よって

$$\sin\theta = -\sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

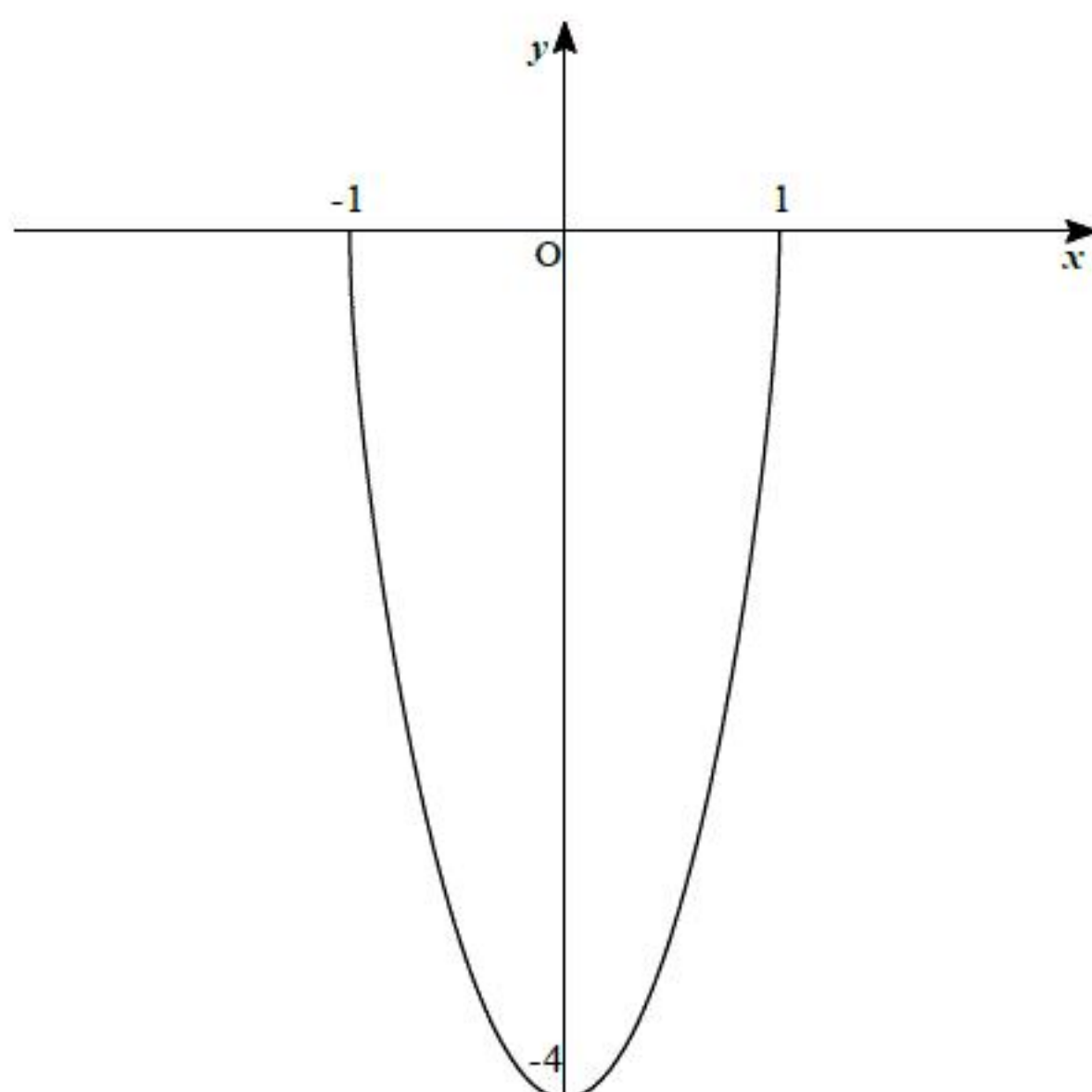
$$\therefore y = 2x^2 - 2\sqrt{1-x^2} - 2$$

…(答)

$$(4) \quad y' = 4x + \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x(2\sqrt{1-x^2} + 1)}{\sqrt{1-x^2}}$$

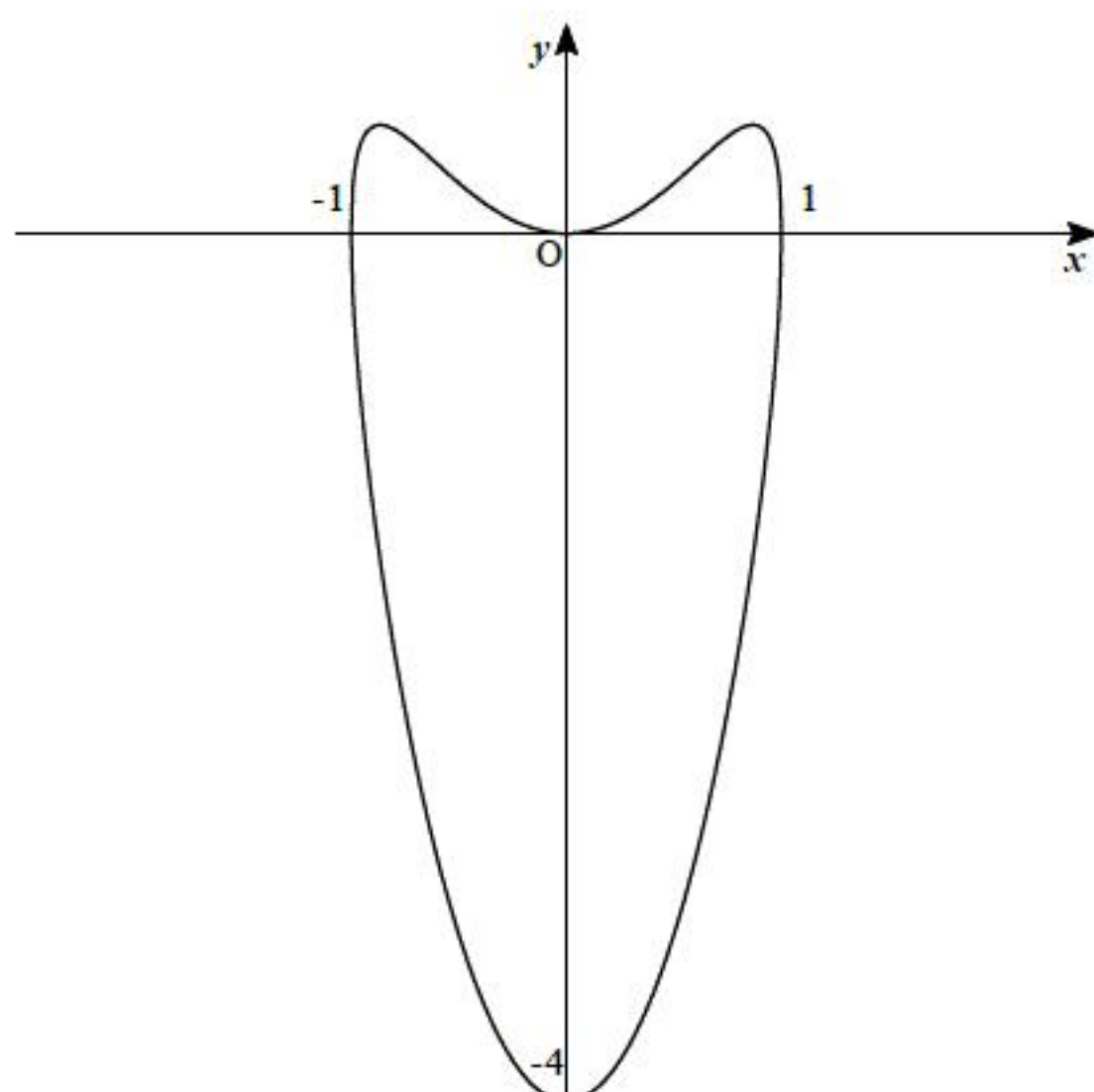
より, 増減表は下のようになる。

x	-1		0		1
$g'(x)$	$-\infty$	-	0	+	$+\infty$
$g(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0

これより, $y = g(x)$ のグラフは下のようになる。

(5) (2),(4)の曲線を合わせたものが曲線Cとなる。

よって曲線Cの概形は下のようになる。



(6) (5)より,

$$S = \int_{-1}^1 \left\{ \left(2x^2 + 2\sqrt{1-x^2} - 2 \right) - \left(2x^2 - 2\sqrt{1-x^2} - 2 \right) \right\} dx$$

$$= 4 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

ここで, $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ は半径1の半円の面積であるから

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore S = 2\pi$$

…(答)