

I

(1)

 $f(x) = (x-1)^2(x-4)$ の両辺を x で微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-1)(x-4) + (x-1)^2 \\ &= 3(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

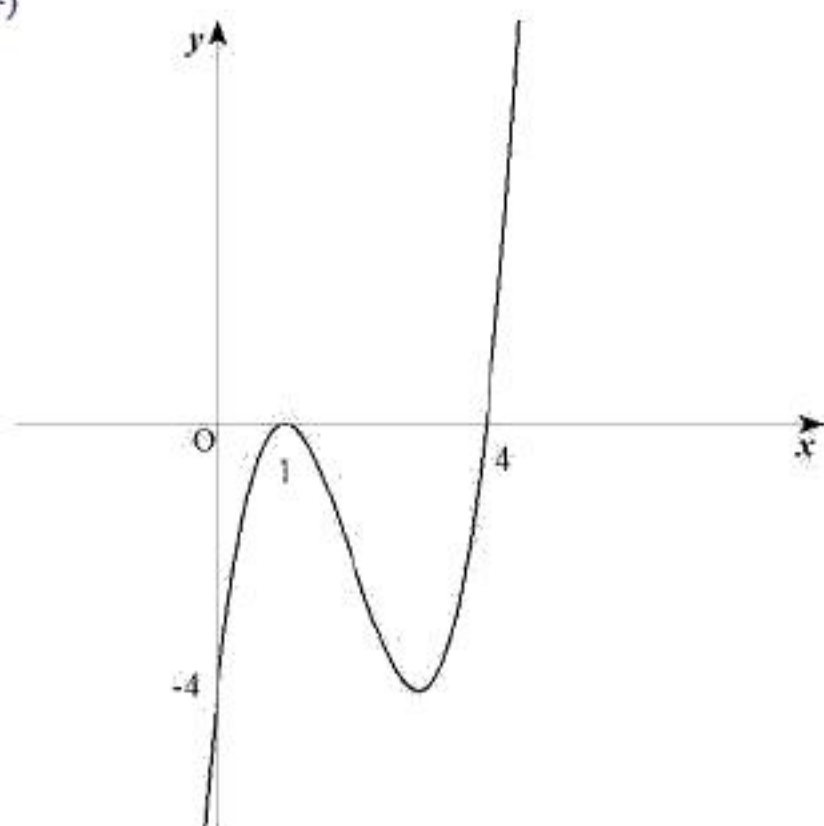
より、次の増減表を得る。

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$

よって、 $f(x)$ は $x=1$ で極大値 0、 $x=3$ で極小値 -4 をとる。

(答) $x=1$ で極大値 0
 $x=3$ で極小値 -4

(答)



(2)

 y 軸との交点の座標は $(0, -4)$

$$f'(0) = 9$$

よりこの点における接線の傾きは 9

したがって、求める接線の式は、

$$y = 9x - 4$$

(答) $y = 9x - 4$

(3)

条件より、

$$C: y - b = 3(x - a)^2$$

(答) $y = 3x^2 - 6ax + 3a^2 + b$

(4)

曲線 C と y 軸との交点の座標は $(0, 3a^2 + b)$ 曲線 C の式を x で微分すると、

$$y' = 6(x - a)$$

であるから、この点における接線の傾きは $-6a$

したがって、求める条件は

$$\begin{cases} -6a = 9 \\ 3a^2 + b = -4 \end{cases}$$

を解くことにより、

$$(a, b) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{43}{4} \right)$$

(答) $(a, b) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{43}{4} \right)$

II

(1)

$f'(x) = kx$ より両辺を x で積分して、

$$f(x) = \frac{1}{2}kx^2 + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

と書ける。

$$f(a) = \frac{1}{2}ka^2 + C = b$$

より、

$$C = b - \frac{1}{2}ka^2$$

したがって、

$$f(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}ka^2 + b$$

$$(\text{答}) \quad f(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}ka^2 + b$$

(2)

(1)より水面は $x=0$ で最小となるので、

$$f(0) = -\frac{1}{2}ka^2 + b = 0$$

を解いて、

$$k = \frac{2b}{a^2}$$

$$(\text{答}) \quad k = \frac{2b}{a^2}$$

(3)

求める体積を V とおくと、 V は次図の斜線部を z 軸の周りに回転させて得られる立体の体積である。

(1),(2)より水面の式は

$$z = \frac{b}{a^2}x^2 \quad \text{なので、}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^b (a^2 - x^2) dz \\ &= a^2 b \pi - \pi \int_0^b \frac{a^2}{b} z dz \\ &= a^2 b \pi - \pi \left[\frac{a^2}{2b} z^2 \right]_0^b \\ &= \frac{a^2 b}{2} \pi \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad V = \frac{a^2 b}{2} \pi$$

