

[1]

(1)

(i)

第 m 群には m 個の自然数が含まれることから、
第 1 群から第 m 群までに含まれる自然数の個数は

$$\sum_{k=1}^m k = \frac{1}{2}m(m+1) \quad \dots \textcircled{1}$$

また第 1 群が 1 から始まっていることから第 m 群の最後の数は

$$\frac{1}{2}m(m+1)$$

よって 100 が第 m 群に含まれるとすると

$$\frac{1}{2}m(m-1) < 100 \leq \frac{1}{2}m(m+1) \quad \dots \textcircled{2}$$

が成立。

②を満たす整数 m は $m = 14$

第 13 群の最大の数は①より

$$\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 14 = 91$$

なので、100 は第 14 群の 9 番目の数

...(答)

(ii)

(i)より第 $(m-1)$ 群最大の数は $\frac{1}{2}m(m-1)$ であるから、

第 m 群の第 k 番目の数は

$$\frac{1}{2}m(m-1) + k \quad \dots \text{(答)}$$

(2)

第 m 段には m 個の自然数が含まれるので、

A_n が第 m 段の第 k 番目の点であるとする (1) の結果より

$$n = \frac{1}{2}m(m-1) + k$$

$A_n = (x, y)$ とおくと

$$\begin{cases} y = k \\ x + y = m + 1 \end{cases}$$

が成立するので、

$$A_n = \left(\frac{1}{2}m(m+1) - n + 1, n - \frac{1}{2}m(m-1) \right) \quad \dots \text{(答)}$$

(ii)

第 i 段の y 座標の和は

$$\sum_{k=1}^i k = \frac{1}{2}i(i+1)$$

なので、第 1 段から第 $(m-1)$ 段までの y 座標の和は

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{2}k(k+1) = \frac{1}{6}m(m^2-1) \quad \dots \textcircled{3}$$

また第 m 段において A_n までの y 座標の和は、 $j = n - \frac{1}{2}m(m-1)$ とおいて

$$\sum_{k=1}^j k = \frac{1}{2}j(j+1) \quad \dots \textcircled{4}$$

③、④より A_1 から A_n までの y 座標の和は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6}m(m^2-1) + \frac{1}{2} \left\{ n - \frac{1}{2}m(m-1) \right\} \left\{ n - \frac{1}{2}m(m-1) + 1 \right\} \\ &= \frac{1}{24}m(m^2-1)(3m-2) + \frac{1}{2}n(n-m^2+m+1) \quad \dots \text{(答)} \end{aligned}$$

[2]

- (1) P は放物線 $y = x^2$ 上の点なので $P(t, t^2)$ とおける。
 $Q(x_0, y_0)$ とおくと、

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} x_0 = at + bt^2 \\ y_0 = ct + dt^2 \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

よって、Q が x 軸上にあるとき

$$\begin{aligned} y_0 &= ct + dt^2 = 0 \\ \therefore t(c + dt) &= 0 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

(i) $d = 0$ のとき

このとき②より

$$ct = 0$$

ここで $c = 0$ とすると、 $ad - bc = 0$ となり不適。

よって $t = 0$ で、 $P(0, 0)$

(ii) $d \neq 0$ のとき

このとき②より

$$t = 0, -\frac{c}{d}$$

よって P は $(0, 0), \left(-\frac{c}{d}, \frac{c^2}{d^2}\right)$

以上(i),(ii)より

$$(0, 0), \left(-\frac{c}{d}, \frac{c^2}{d^2}\right) \quad \dots (\text{答})$$

- (2) ①より、Q が放物線 $y = x^2$ 上にあるとき

$$ct + dt^2 = (at + bt^2)^2$$

整理して

$$b^2t^4 + 2abt^3 + (a^2 - d)t^2 - ct = 0$$

これが任意の t について成立すればよく、その条件は

$$\begin{cases} b = 0 \\ 2ab = 0 \\ a^2 - d = 0 \\ -c = 0 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} b = c = 0 \\ d = a^2 \neq 0 \end{cases} \quad \dots (\text{答})$$

- (3) $R(x_1, y_1)$ とおく。放物線 $y = x^2$ 上にあるとき

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & d^2 + bc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって、R が放物線 $y = x^2$ 上にあるとき、(2)の結果より

$$b(a + d) = c(a + d) = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$d^2 + bc = (a^2 + bc)^2 \neq 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

④に $a = 2$ を代入して整理すると

$$(bc)^2 + 7bc + 16 - d^2 = 0 \quad \dots \textcircled{5}$$

(i) $a + d = 0$ のとき

このとき $a = 2$ なので $d = -2$

よって⑤より

$$(bc + 3)(bc + 4) = 0$$

$$\therefore bc = -3, -4$$

$$ad - bc = -4 - bc \neq 0$$

なので

$$bc \neq -4$$

すなわち

$$bc = -3$$

$$\therefore ad - bc = -4 - (-3) = -1$$

(ii) $a + d \neq 0$ のとき

このとき③より $b = c = 0$

これを⑤に代入して

$$16 - d^2 = 0$$

$$\therefore d = \pm 4$$

$$\therefore ad - bc = 2 \cdot (\pm 4) = \pm 8$$

以上(i),(ii)より

$$ad - bc = -1, \pm 8 \quad \dots (\text{答})$$

[3]

(1)

(I) $f(x) = \log(1+x) - \frac{x}{x+1}$ ($x > -1$) とおく。

$f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ より, 増減表は下のようになる。

x	-1	...	0	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

よって増減表から $f(x) \geq 0$

$$\therefore \frac{x}{x+1} \leq \log(1+x) \quad (\text{等号成立は } x=0 \text{ のとき}) \quad \dots(\text{証明終})$$

(II) $g(x) = x - \log(1+x)$ ($x > -1$) とおく。

$g'(x) = \frac{x}{x+1}$ より, 増減表は下のようになる。

x	-1	...	0	...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

よって増減表から $g(x) \geq 0$

$$\therefore \log(1+x) \leq x \quad (\text{等号成立は } x=0 \text{ のとき}) \quad \dots(\text{証明終})$$

(2) $1 \leq k \leq n$ より $0 < \frac{k^a}{n^{a+1}} = \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n} \right)^a \leq \frac{1}{n}$

よって(1)より $0 < \frac{k^a}{n^{a+1}}$ のとき等号は成立しないため

$$\frac{\frac{k^a}{n^{a+1}}}{\frac{k^a}{n^{a+1}} + 1} < \log \left(1 + \frac{k^a}{n^{a+1}} \right) < \frac{k^a}{n^{a+1}} \quad \dots \textcircled{1}$$

①において,

$$\frac{\frac{k^a}{n^{a+1}}}{\frac{k^a}{n^{a+1}} + 1} = \frac{k^a}{k^a + n^{a+1}} \geq \frac{k^a}{n^a + n^{a+1}}$$

であるから,

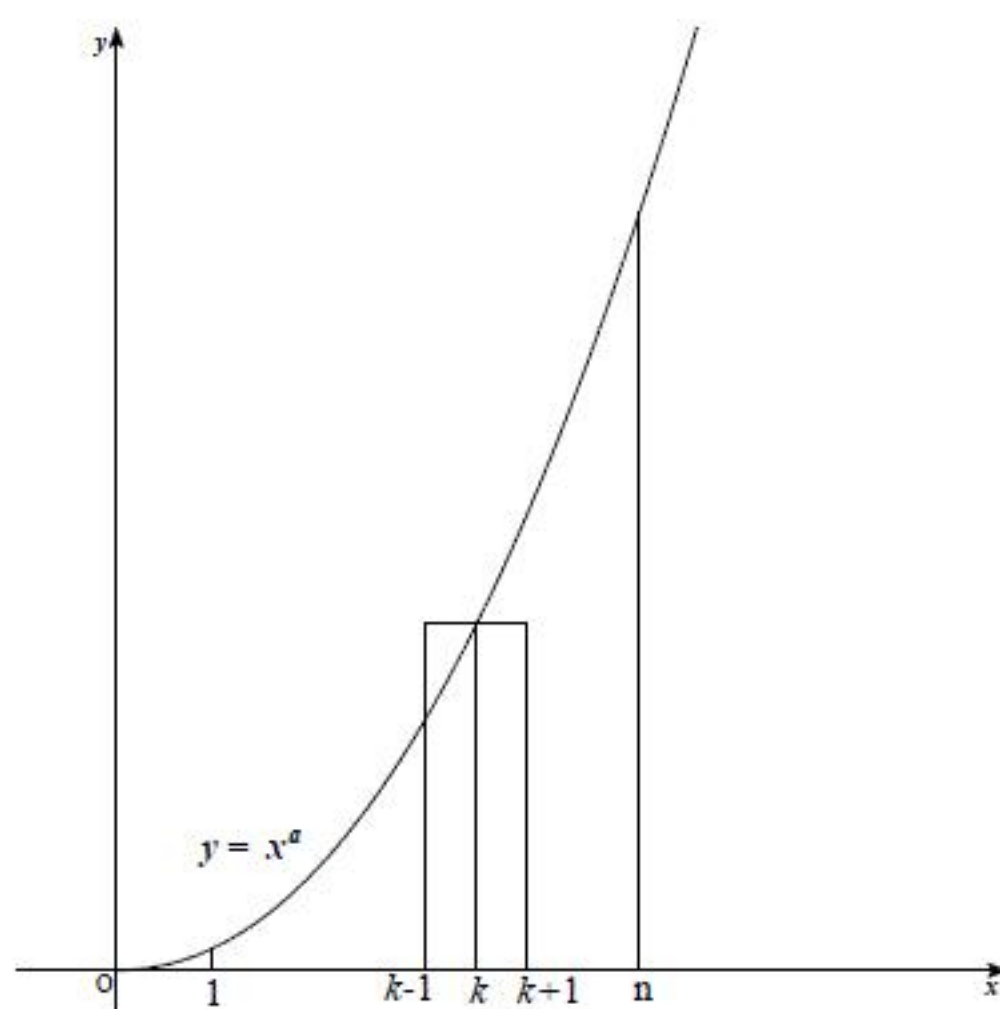
$$\frac{k^a}{n^a + n^{a+1}} < \log \left(1 + \frac{k^a}{n^{a+1}} \right) < \frac{k^a}{n^{a+1}} \quad \dots \textcircled{2}$$

を得る。

②において各辺 $k=1$ から $k=n$ まで和をとって

$$\frac{1}{n^a(n+1)} \sum_{k=1}^n k^a < S_n < \frac{1}{n^{a+1}} \sum_{k=1}^n k^a \quad \dots(\text{証明終})$$

(3) $y = x^a$ の図を用いて考える。



この図において, 2つの長方形の面積はどちらも k^a なので,

$$\sum_{k=1}^n k^a < \int_1^{n+1} x^a dx = \left[\frac{1}{a+1} x^{a+1} \right]_1^{n+1} = \frac{1}{a+1} \{ (n+1)^{a+1} - 1 \}$$

$$\sum_{k=1}^n k^a > \int_0^n x^a dx = \left[\frac{1}{a+1} x^{a+1} \right]_0^n = \frac{n^{a+1}}{a+1}$$

が成立。これら2式と(2)より

$$\frac{1}{n^a(n+1)} \cdot \frac{n^{a+1}}{a+1} < S_n < \frac{1}{n^{a+1}} \cdot \frac{1}{a+1} \{ (n+1)^{a+1} - 1 \}$$

この不等式において,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a(n+1)} \cdot \frac{n^{a+1}}{a+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{a+1}$$

および

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{a+1}} \cdot \frac{1}{a+1} \{ (n+1)^{a+1} - 1 \} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a+1} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{a+1} - \frac{1}{n^{a+1}} \right\} = \frac{1}{a+1}$$

が成立するので, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{a+1} \quad \dots(\text{答})$$

[4]

(1) 求める確率を P_0 とおく。(i) n が偶数のとき

$$\text{偶数のカードは } \frac{n}{2} \text{ 枚あるので, } P_0 = \frac{\frac{n}{2}}{n} = \frac{1}{2} \quad \dots(\text{答})$$

(ii) n が奇数のとき

$$\text{偶数のカードは } \frac{n-1}{2} \text{ 枚あるので, } P_0 = \frac{\frac{n-1}{2}}{n} = \frac{n-1}{2n} \quad \dots(\text{答})$$

(2)

(i) 引いたカードの偶奇が一致すればよい。よって、(1)より

(a) n が偶数のとき

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad \dots(\text{答})$$

(b) n が奇数のとき

$$P = \left(\frac{n-1}{2n}\right)^2 + \left(\frac{n+1}{2n}\right)^2 = \frac{n^2+1}{2n^2} \quad \dots(\text{答})$$

(ii)

一方の箱から取り出したカードの数字を m とおく。合計が k の時もう一方のカードの数字は $(k-m)$ となる。よって合計が k となるような組み合わせが存在する m の範囲は

$$1 \leq k-m \leq n$$

すなわち

$$k-n \leq m \leq k-1 \quad \dots\textcircled{1}$$

また,

$$1 \leq m \leq n \quad \dots\textcircled{2}$$

\textcircled{1}と\textcircled{2}の共通範囲が、合計が k となりえる m の範囲である。(a) $k-n \leq 1$ かつ $1 \leq k-1 \leq n$ つまり $2 \leq k \leq n+1$ のときこのとき $1 \leq m \leq k-1$ であり、 m が決まれば $(k-m)$ も一つに定まる。

$$\therefore P(k) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot (k-1) = \frac{k-1}{n^2}$$

(b) $1 \leq k-n$ かつ $k-1 \geq n$ つまり $n+1 \leq k \leq 2n$ のときこのとき $k-n \leq m \leq n$ であり、 m が決まれば $(k-m)$ も一つに定まる。

$$\therefore P(k) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot (n-k+n+1) = \frac{2n+1-k}{n^2}$$

 $2 \leq k \leq 2n$ なので、(a)(b)の場合分けのみで漏れはない。

以上より

$$P(k) = \frac{k-1}{n^2} \quad (2 \leq k \leq n+1) \quad \dots(\text{答})$$

$$P(k) = \frac{2n+1-k}{n^2} \quad (n+1 \leq k \leq 2n) \quad \dots(\text{答})$$

(iii)

(ii)より,

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=2}^{2n} k \cdot P(k) = \sum_{k=2}^n k \cdot \frac{k-1}{n^2} + \sum_{k=n+1}^{2n} k \cdot \frac{2n+1-k}{n^2} \\ &= \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{k-1}{n^2} + \left(\sum_{k=1}^{2n} k \cdot \frac{2n+1-k}{n^2} - \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{2n+1-k}{n^2} \right) \\ &= n+1 \quad \dots(\text{答}) \end{aligned}$$