

[1]

$$(1) \quad y = 2 \sin x - \cos^2 x = \sin^2 x + 2 \sin x - 1 = (\sin x + 1)^2 - 2$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ であるから, $-1 \leq \sin x \leq 1$

よって, $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -2 をとる。

(答) $x = \frac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -2

$$(2) \quad \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = (2+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}$$

であるから

$$a = 1, b = \sqrt{2} - 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

ここで,

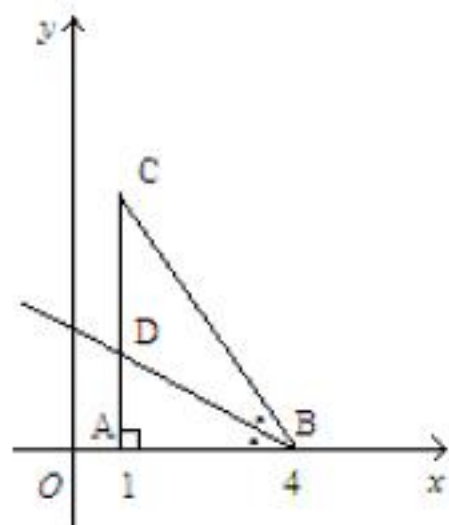
$$a^2b + a^2 + 2ab^2 + 2ab + b^3 + b^2 = (a+b)^2 + b(a+b)^2 = (b+1)(a+b)^2$$

となるから, ①の値を代入して

$$a^2b + a^2 + 2ab^2 + 2ab + b^3 + b^2 = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{2}$$

(答) $2\sqrt{2}$

(3)



まず, $AB = 3$, $CA = 4$ より $BC = 5$ である。

$\angle B$ の二等分線と CA の交点を D とおくと

$AD : DC = AB : BC = 3 : 5$ であるから,

$$AD = 4 \cdot \frac{3}{3+5} = \frac{3}{2} \quad \therefore D\left(1, \frac{3}{2}\right)$$

よって, 直線 BD の方程式は

$$y = \frac{\frac{3}{2} - 0}{1 - 4}(x - 4) = -\frac{1}{2}x + 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

求める座標は直線②と y 軸との交点なので, $(0, 2)$

(答) $(0, 2)$

[2]

(1) $y = \frac{1}{x}$ の両辺を x で微分すると, $y' = -\frac{1}{x^2}$

よって $P\left(t, \frac{1}{t}\right)$ における C_1 の接線の方程式は

$$y - \frac{1}{t} = -\frac{1}{t^2}(x - t)$$

$$y = -\frac{1}{t^2}x + \frac{2}{t}$$

(証明終)

(2)

(i) $y = -ax^2 + bx$ の両辺を x で微分すると, $y' = -2ax + b$

よって $P(t, -at^2 + bt)$ における C_2 の接線の方程式は

$$y + at^2 - bt = (-2at + b)(x - t)$$

$$y = (-2at + b)x + at^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

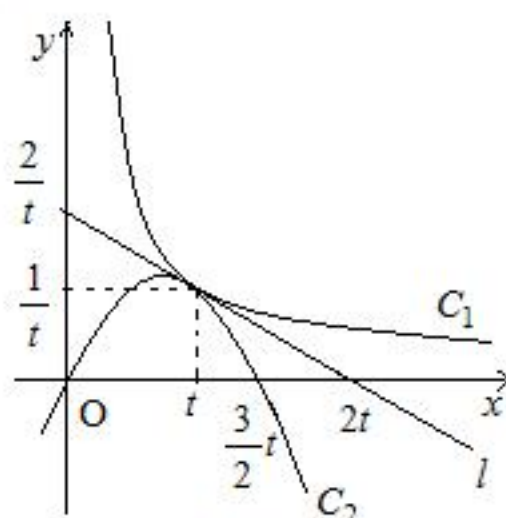
直線①と l が一致するので, 係数を比較して

$$\begin{cases} -2at + b = -\frac{1}{t^2} \\ at^2 = \frac{2}{t} \end{cases}$$

これを解いて $(a, b) = \left(\frac{2}{t^3}, \frac{3}{t^2}\right)$

(証明終)

(ii)



図から

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 2t \cdot \frac{2}{t} = 2$$

$$S_2 = \int_0^{\frac{3}{2}t} \left(-\frac{2}{t^3}x^2 + \frac{3}{t^2}x \right) dx = \int_0^{\frac{3}{2}t} -\frac{2}{t^3}x \left(x - \frac{3}{2}t \right) dx = \frac{1}{3t^3} \left(\frac{3}{2}t \right)^3 = \frac{9}{8}$$

よって,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{16}{9}$$

(答) $\frac{16}{9}$

[3]

(1) 漸化式に順次代入して $a_2 = 1, a_3 = 3, a_4 = 6$ $b_2 = 5, b_3 = 14, b_4 = 30$

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} a_2 = 1, a_3 = 3, a_4 = 6 \\ b_2 = 5, b_3 = 14, b_4 = 30 \end{cases}$$

(2) $a_{n+1} - a_n = n$ より, $n \geq 2$ において

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}n(n-1)$$

が成り立つ。これは $n=1$ でも成り立つ。

同様に, $b_{n+1} - b_n = (n+1)^2$ より, $n \geq 2$ において

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

が成り立つ。これは $n=1$ でも成り立つ。

$$\text{よって, } \begin{cases} a_n = \frac{1}{2}n(n-1) \\ b_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \end{cases}$$

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{2}n(n-1) \\ b_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \end{cases}$$

(3) (2)の結果より, $x_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{3(n-1)}{(n+1)(2n+1)}$

$$f(t) = \frac{3(t-1)}{(t+1)(2t+1)} \quad \text{とおくと}$$

$$f'(t) = \frac{3(t+1)(2t+1) - 3(t-1)(4t+3)}{(t+1)^2(2t+1)^2} = \frac{-6(t^2 - 2t - 2)}{(t+1)^2(2t+1)^2}$$

より, $t \geq 1$ の範囲における $f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	1	...	$1+\sqrt{3}$	...
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$

$2 < 1+\sqrt{3} < 3$ より, x_n を最大にする自然数 n は 2 または 3。

$f(2) = \frac{14}{70}$, $f(3) = \frac{15}{70}$ であるから, x_n は $n=3$ で最大となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3}{14} \quad (n=3)$$

[4]

$$(1) \quad AB = \begin{pmatrix} \alpha+1 & \beta+1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \beta^2 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

ここで、 α, β は $x^2 - x - 1 = 0$ の2つの解なので、

$$\begin{cases} \alpha^2 = \alpha + 1 \\ \beta^2 = \beta + 1 \end{cases}$$

を満たす。よって、 $AB = B \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ が成り立つ。

(証明終)

(2) (1)の結果より

$$A^n B = A^{n-1} \cdot AB = A^{n-1} B \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \cdots = B \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n = B \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また、 $\alpha < \beta$ より $\det B = \alpha - \beta \neq 0$ であるので、 B^{-1} が存在する。

$$B^{-1} = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

を①の両辺に右からかけると、

$$A^n = B \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} B^{-1} = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} \beta^{n+1} - \alpha^{n+1} & \alpha \beta (\alpha^n - \beta^n) \\ \beta^n - \alpha^n & \alpha \beta (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) \end{pmatrix}$$

α, β は $x^2 - x - 1 = 0$ の2解なので、解と係数の関係から $\alpha \beta = -1$

$$\therefore A^n = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} \beta^{n+1} - \alpha^{n+1} & \beta^n - \alpha^n \\ \beta^n - \alpha^n & \beta^{n-1} - \alpha^{n-1} \end{pmatrix}$$

(証明終)

$$(3) \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2)の結果と $\begin{cases} \alpha^2 = \alpha + 1 \\ \beta^2 = \beta + 1 \end{cases}$ を用いて

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\beta - \alpha} (\beta^{n-1} - \alpha^{n-1} + \beta^{n-2} - \alpha^{n-2}) \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} \{ \beta^{n-2} (1 + \beta) - \alpha^{n-2} (1 + \alpha) \} = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha} \end{aligned}$$

(証明終)