

平成 21 年度入学者選抜試験問題

工 学 部

数 学

前 期 日 程

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子の本文は，1 ページから 4 ページまでです。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明・落丁・乱丁，解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。
- 4 監督者の指示にしたがって，解答用紙に**大学受験番号**を正しく記入してください。**大学受験番号**が正しく記入されていない場合は，採点できないことがあります。
- 5 解答は，解答用紙の注意事項にしたがって記入してください。また，必要に応じて計算過程も記入してください。
- 6 試験終了後，問題冊子と下書き用紙は持ち帰ってください。

〔1〕 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = 2 \sin x - \cos^2 x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) の最小値を求めよ。また、そのときの x の値を求めよ。

(2) $\frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$ の整数部分を a ，小数部分を b とするとき，
 $a^2b + a^2 + 2ab^2 + 2ab + b^3 + b^2$ の値を求めよ。

(3) xy 平面上に 3 点 $A(1, 0)$, $B(4, 0)$, $C(1, 4)$ を頂点とする $\triangle ABC$ がある。このとき， $\angle B$ の二等分線と y 軸との交点の座標を求めよ。

〔2〕 xy 平面上に 2 曲線 $C_1: y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) と $C_2: y = -ax^2 + bx$ がある。曲線 C_1 上の点 $P\left(t, \frac{1}{t}\right)$ における接線を l とするとき、次の問いに答えよ。ただし、 a と b は正の定数である。

(1) 直線 l の方程式は $y = -\frac{1}{t^2}x + \frac{2}{t}$ であることを示せ。

(2) 直線 l が点 P において曲線 C_2 に接している。

(i) $a = \frac{2}{t^3}$, $b = \frac{3}{t^2}$ であることを示せ。

(ii) 直線 l と x 軸, y 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とし, 曲線 C_2 と x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とするとき, $\frac{S_1}{S_2}$ を求めよ。

〔3〕 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = a_n + n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = b_n + (n+1)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定められるとき、次の問いに答えよ。

(1) a_2, a_3, a_4 および b_2, b_3, b_4 の値を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $x_n = \frac{a_n}{b_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ とするとき、 x_n の最大値を求めよ。

〔4〕 2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の 2 つの解を α, β ($\alpha < \beta$) とする。行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ について, 次の問いに答えよ。ただし, 以下で}$$

用いる n は自然数とする。

(1) $AB = B \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ を示せ。

(2) $A^n = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} \beta^{n+1} - \alpha^{n+1} & \beta^n - \alpha^n \\ \beta^n - \alpha^n & \beta^{n-1} - \alpha^{n-1} \end{pmatrix}$ を示せ。

(3) $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ が

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

を満たすことを用いて, $a_n = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}$ を示せ。