

[1]

(1)

①式は,

$$y=2\left(x+\frac{k}{4}\right)^2-\frac{k^2}{8}-\frac{k}{2}$$

と変形できるので, グラフの頂点の座標は,

$$\left(-\frac{k}{4}, -\frac{k^2}{8}-\frac{k}{2}\right)$$

である。

$$(\text{答}) \left(-\frac{k}{4}, -\frac{k^2}{8}-\frac{k}{2}\right)$$

(2)

頂点の座標を (X, Y) とおくと, (1)より,

$$X=-\frac{k}{4}$$

$$Y=-\frac{k^2}{8}-\frac{k}{2}$$

である。 $k=-4X$ より, これら 2 式から k を消去すると,

$$\begin{aligned} Y &= -\frac{(-4X)^2}{8} - \frac{-4X}{2} \\ &= -2X^2 + 2X \end{aligned}$$

となる。また, k は実数全体を動くため, X も実数全体を動く。したがって, 求める軌跡は, 放物線 $y=-2x^2+2x$ である。

$$(\text{答}) \text{ 放物線 } y=-2x^2+2x$$

(3)

2 けたの数字が書かれたカードの枚数は 10, 11, 12 の 3 枚である。

1 けたの数字が書かれたカードの枚数は 1, 2, ..., 9 の 9 枚である。

(i)

2 けたの数字が書かれたカードが 0 枚となる確率は,

$$\frac{{}_9C_3}{{}_{12}C_3} = \frac{21}{55}$$

である。2 けたの数字が書かれたカードが 1 枚となる確率は,

$$\frac{{}_3C_1 \cdot {}_9C_2}{{}_{12}C_3} = \frac{27}{55}$$

である。2 けたの数字が書かれたカードが 2 枚となる確率は,

$$\frac{{}_3C_2 \cdot {}_9C_1}{{}_{12}C_3} = \frac{27}{220}$$

である。2 けたの数字が書かれたカードが 3 枚となる確率は,

$$\frac{{}_3C_3}{{}_{12}C_3} = \frac{1}{220}$$

である。

(答)

(答) 2 けたの数字のカード 確率

$$0 \text{ 枚} \quad \frac{21}{55}$$

$$1 \text{ 枚} \quad \frac{27}{55}$$

$$2 \text{ 枚} \quad \frac{27}{220}$$

$$3 \text{ 枚} \quad \frac{1}{220}$$

(ii)

(1)より, 2 次関数①の最小値は $-\frac{k^2}{8}-\frac{k}{2}$ ($=f(k)$ とおく)である。 $k=0, 1, 2, 3$ について, $f(k)$

をそれぞれ求めると,

$$f(0)=0$$

$$f(1)=-\frac{5}{8}$$

$$f(2)=-\frac{3}{2}$$

$$f(3)=-\frac{21}{8}$$

であるので, $k=2, 3$ のときに $f(k)<-1$ となる。 $k=2, 3$ となる確率は(2)よりそれぞれ,

$$\frac{27}{220}, \frac{1}{220} \text{ なので, 求める確率は,}$$

$$\frac{27}{220} + \frac{1}{220} = \frac{7}{55}$$

である。

$$(\text{答}) \frac{7}{55}$$

[2]

(1)

$AB = AC = 2$, $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ なので,

$$\begin{aligned}\vec{b} \cdot \vec{c} &= |\vec{b}| |\vec{c}| \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 2\end{aligned}$$

である。

(答) $\vec{b} \cdot \vec{c} = 2$

(2)

$BR : RC = 2 : 1$ なので,

$$\overrightarrow{AR} = \frac{1 \cdot \vec{b} + 2 \cdot \vec{c}}{2+1} = \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{2}{3} \vec{c}$$

である。

(答) $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{2}{3} \vec{c}$

(3)

点 S は線分 PR 上にあるので, $0 < t < 1$ を満たす実数 t を用いて,

$$\overrightarrow{AS} = t \overrightarrow{AP} + (1-t) \overrightarrow{AR}$$

と表せる。(2)の結果と, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2} \vec{b}$ を用いれば,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AS} &= t \cdot \frac{1}{2} \vec{b} + (1-t) \cdot \left(\frac{1}{3} \vec{b} + \frac{2}{3} \vec{c} \right) \\ &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} t \right) \vec{b} + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} t \right) \vec{c}\end{aligned}$$

となる。また, 点 S は線分 QC 上にもあるので, $0 < s < 1$ を満たす実数 s を用いて,

$$\overrightarrow{AS} = s \overrightarrow{AQ} + (1-s) \overrightarrow{AC}$$

と表せる。 $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4} \vec{b}$ を用いれば,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AS} &= s \cdot \frac{3}{4} \vec{b} + (1-s) \cdot \vec{c} \\ &= \frac{3}{4} s \vec{b} + (1-s) \vec{c}\end{aligned}$$

となる。これと $\overrightarrow{AS} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} t \right) \vec{b} + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} t \right) \vec{c}$ を比較すれば, $\vec{b}, \vec{c}$ は 1 次独立なベクトルなので,

$$\begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{6} t = \frac{3}{4} s \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} t = 1 - s \end{cases}$$

となる。これを解くと,

$$\begin{cases} t = \frac{1}{4} \\ s = \frac{1}{2} \end{cases}$$

である。したがって,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AS} &= \frac{3}{4} s \vec{b} + (1-s) \vec{c} \\ &= \frac{3}{8} \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{c}\end{aligned}$$

である。

(答) $\overrightarrow{AS} = \frac{3}{8} \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{c}$

(4)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AS}|^2 &= \left| \frac{3}{8} \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{c} \right|^2 \\ &= \frac{9}{64} |\vec{b}|^2 + \frac{3}{8} \vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{4} |\vec{c}|^2 \\ &= \frac{9}{64} \cdot 2^2 + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 2^2 \\ &= \frac{37}{16}\end{aligned}$$

なので,

$$|\overrightarrow{AS}| = \frac{\sqrt{37}}{4}$$

である。

(答) $|\overrightarrow{AS}| = \frac{\sqrt{37}}{4}$

(5)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AS} &= \frac{1}{2} \vec{b} \cdot \left(\frac{3}{8} \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{c} \right) \\ &= \frac{3}{16} |\vec{b}|^2 + \frac{1}{4} \vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= \frac{3}{16} \cdot 2^2 + \frac{1}{4} \cdot 2 \\ &= \frac{5}{4}\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}\Delta_{APS} &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2 |\overrightarrow{AS}|^2 - (\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AS})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{37}}{4} \right)^2 - \left(\frac{5}{4} \right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

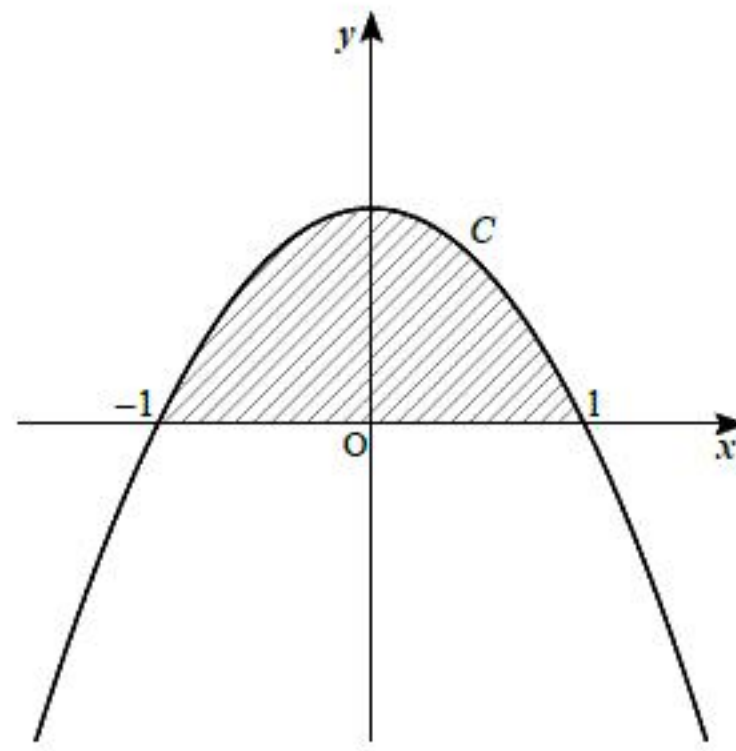
[3]

(1)

放物線 $C: y = -x^2 + 1$ と x 軸の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} 0 &= -x^2 + 1 \\ \Leftrightarrow x &= \pm 1 \end{aligned}$$

である。よって、面積を求めるのは次図の斜線部である。



よって、求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx &= -\int_{-1}^1 (x+1)(x-1) dx \\ &= \frac{1}{6}(1+1)^3 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

である。

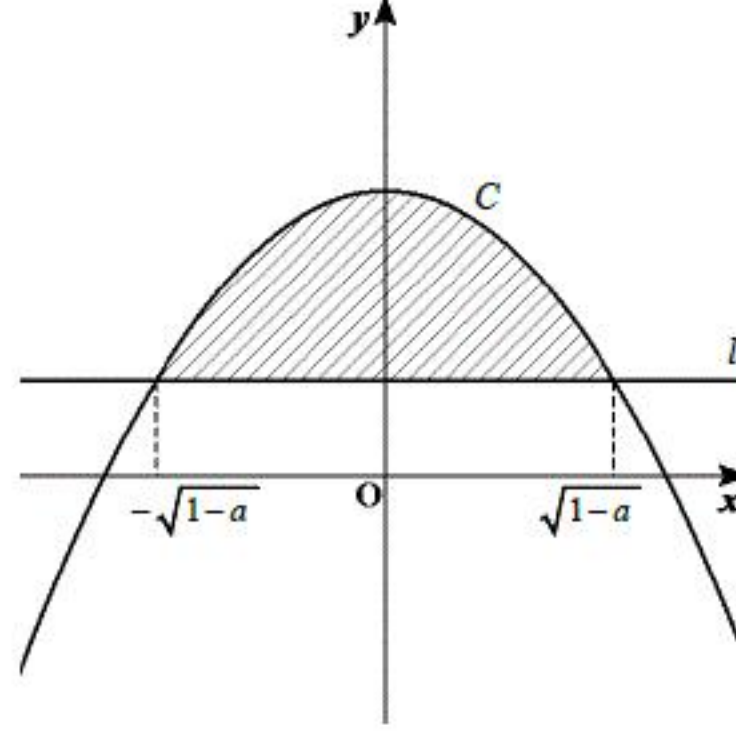
(答) $\frac{4}{3}$

(2)

放物線 C と直線 $l: y = a$ の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} -x^2 + 1 &= a \\ \Leftrightarrow x &= \pm\sqrt{1-a} \quad (\because 0 < a < 1) \end{aligned}$$

である。よって、面積を求めるのは次図の斜線部である。



よって、求める面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{1-a}}^{\sqrt{1-a}} \{(-x^2 + 1) - a\} dx \\ &= -\int_{-\sqrt{1-a}}^{\sqrt{1-a}} (x - \sqrt{1-a})(x + \sqrt{1-a}) dx \\ &= \frac{1}{6}(\sqrt{1-a} + \sqrt{1-a})^3 \\ &= \frac{4}{3}(1-a)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

である。

(答) $S = \frac{4}{3}(1-a)^{\frac{3}{2}}$

(3)

(2)の結果を用いると、 $S = \frac{\sqrt{2}}{3}$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}(1-a)^{\frac{3}{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \Leftrightarrow (1-a)^{\frac{3}{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

となる。この両辺2乗すると、

$$(1-a)^3 = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

よって、

$$\begin{aligned} 1-a &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $a = \frac{1}{2}$

(4)

[1] $-x^2 + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1, x > 1$ のとき

$$\begin{aligned} y &= -(-x^2 + 1) \\ &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

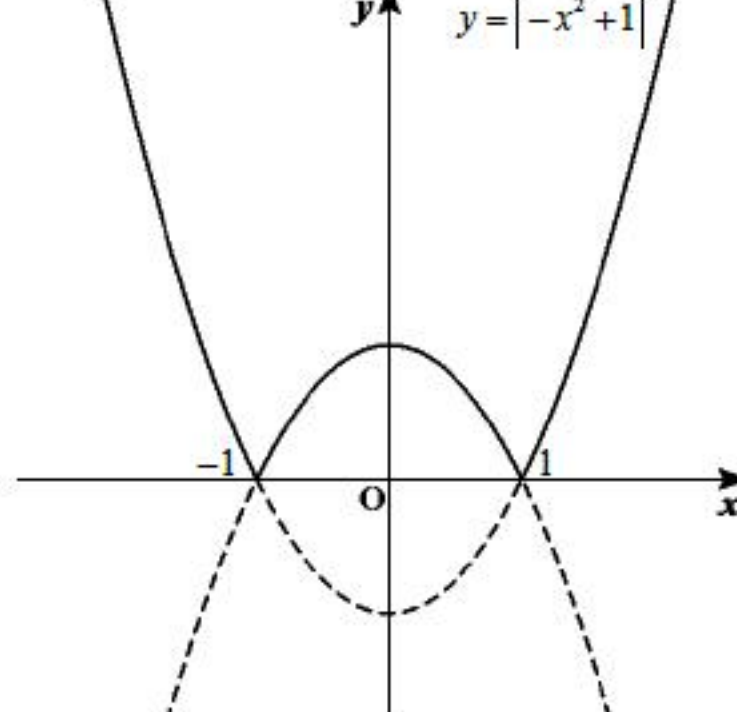
となる。

[2] $-x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ のとき

$$y = -x^2 + 1$$

となる。

以上より、 $y = |-x^2 + 1|$ のグラフは次図の実線部ようになる。



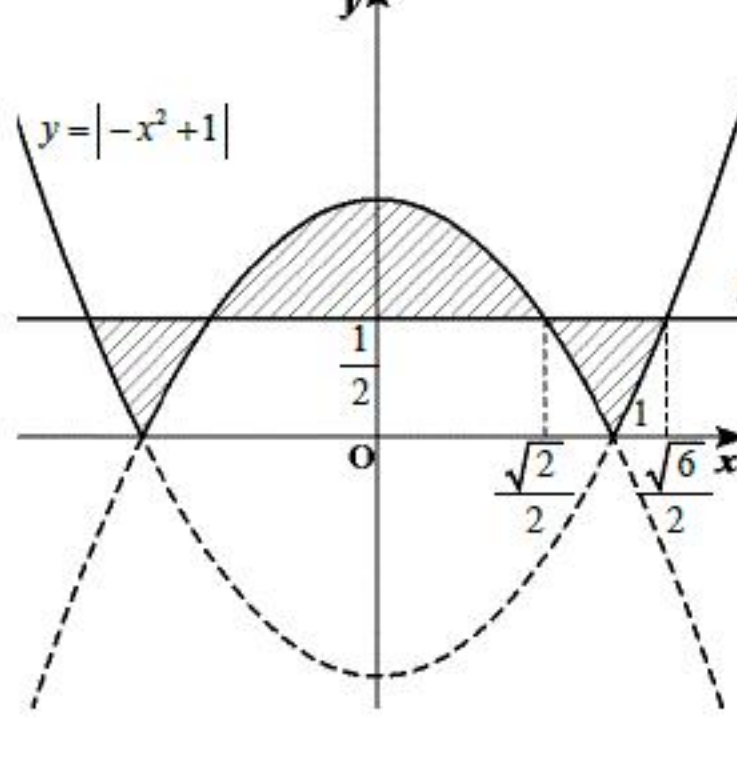
(答) 前図

(5)

(3)より、 $S = \frac{\sqrt{2}}{3}$ のとき $a = \frac{1}{2}$ である。曲線 $y = |-x^2 + 1|$ と直線 $l: y = \frac{1}{2}$ の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} |-x^2 + 1| &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow -x^2 + 1 &= \pm \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

である。よって、面積を求めるのは次図の斜線部である。



よって、グラフが y 軸対称であることに注意すれば、求める面積は、

$$\begin{aligned} S &+ 2 \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \left\{ \frac{1}{2} - (-x^2 + 1) \right\} dx + 2 \int_1^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \left\{ \frac{1}{2} - (x^2 - 1) \right\} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} + 2 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 + 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x \right]_1^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{6} - \frac{8}{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{6} - \frac{8}{3}$