

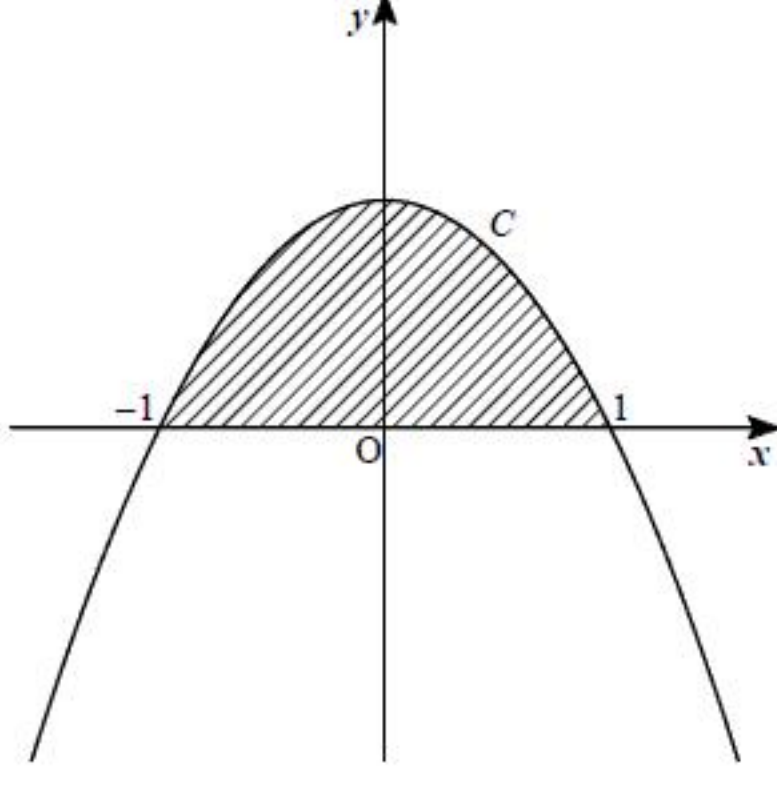
[1]

(1)

放物線 $C: y = -x^2 + 1$ と x 軸の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} 0 &= -x^2 + 1 \\ \Leftrightarrow x &= \pm 1 \end{aligned}$$

である。よって、面積を求めるのは次図の斜線部である。



よって、求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx &= -\int_{-1}^1 (x+1)(x-1) dx \\ &= \frac{1}{6}(1+1)^3 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

である。

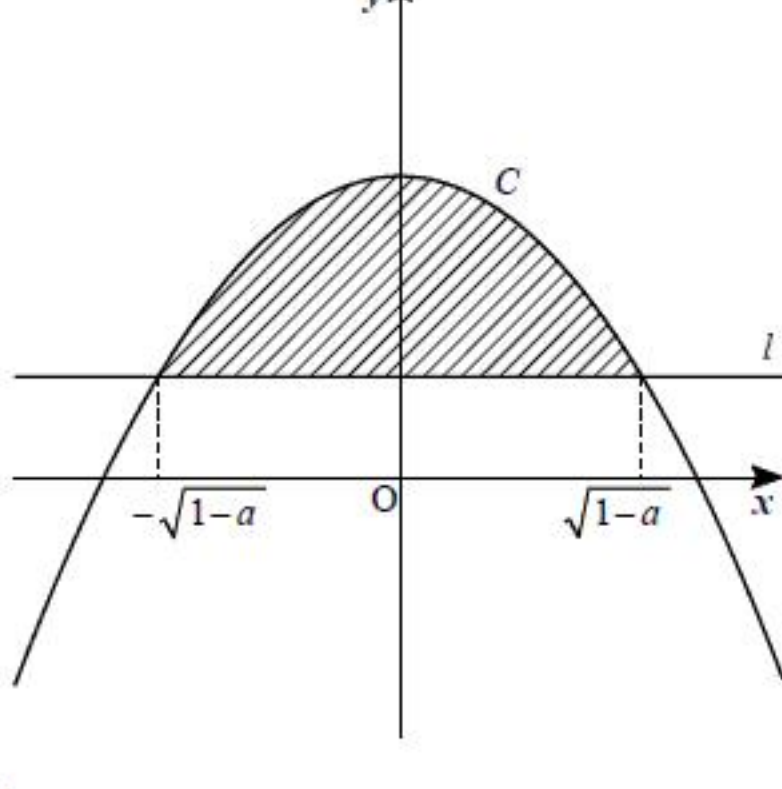
(答) $\frac{4}{3}$

(2)

放物線 C と直線 $l: y = a$ の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} -x^2 + 1 &= a \\ \Leftrightarrow x &= \pm\sqrt{1-a} \quad (\because 0 < a < 1) \end{aligned}$$

である。よって、面積を求めるのは次図の斜線部である。



よって、求める面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{1-a}}^{\sqrt{1-a}} \{(-x^2 + 1) - a\} dx \\ &= -\int_{-\sqrt{1-a}}^{\sqrt{1-a}} (x - \sqrt{1-a})(x + \sqrt{1-a}) dx \\ &= \frac{1}{6}(\sqrt{1-a} + \sqrt{1-a})^3 \\ &= \frac{4}{3}(1-a)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

である。

(答) $S = \frac{4}{3}(1-a)^{\frac{3}{2}}$

(3)

(2)の結果を用いると、 $S = \frac{\sqrt{2}}{3}$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}(1-a)^{\frac{3}{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \Leftrightarrow (1-a)^{\frac{3}{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

となる。この両辺 2 乗すると、

$$(1-a)^3 = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

よって、

$$\begin{aligned} 1-a &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $a = \frac{1}{2}$

(4)

[1] $-x^2 + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1, x > 1$ のとき

$$\begin{aligned} y &= -(-x^2 + 1) \\ &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

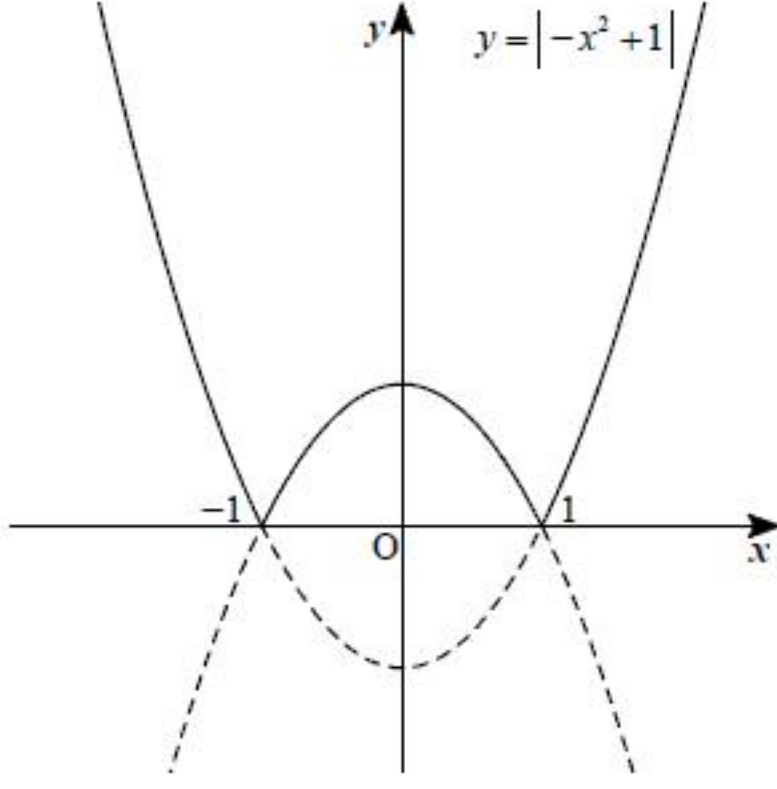
となる。

[2] $-x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ のとき

$$y = -x^2 + 1$$

となる。

以上より、 $y = |-x^2 + 1|$ のグラフは次図の実線部のようになる。



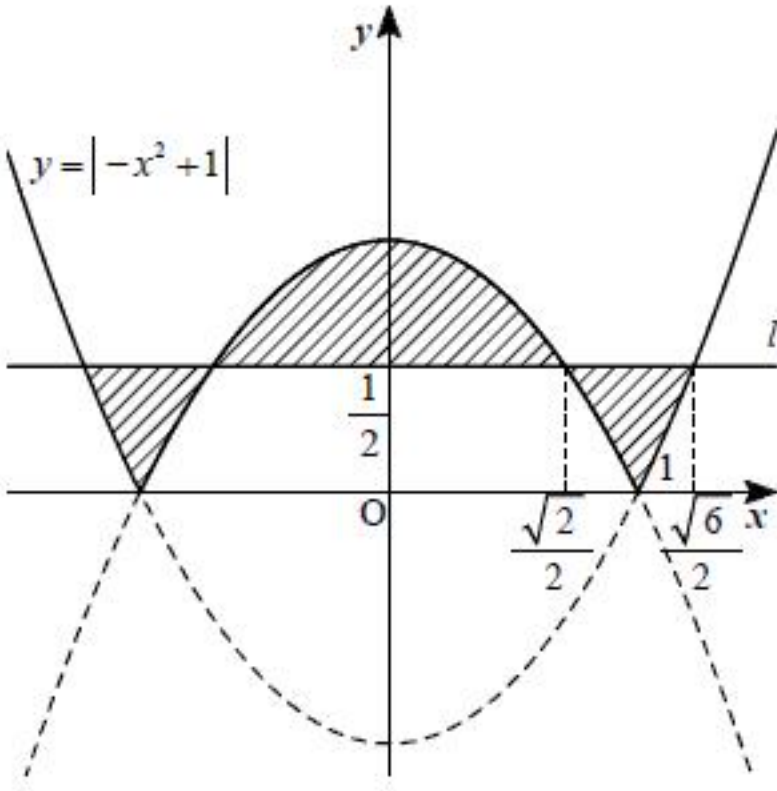
(答) 前図

(5)

(3)より、 $S = \frac{\sqrt{2}}{3}$ のとき $a = \frac{1}{2}$ である。曲線 $y = |-x^2 + 1|$ と直線 $l: y = \frac{1}{2}$ の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} |-x^2 + 1| &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow -x^2 + 1 &= \pm\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

である。よって、面積を求めるのは次図の斜線部である。



よって、グラフが y 軸対称であることに注意すれば、求める面積は、

$$\begin{aligned} S &+ 2\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \left\{ \frac{1}{2} - (-x^2 + 1) \right\} dx + 2\int_1^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \left\{ \frac{1}{2} - (x^2 - 1) \right\} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} + 2\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 + 2\left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x \right]_1^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{6} - \frac{8}{3} \end{aligned}$$

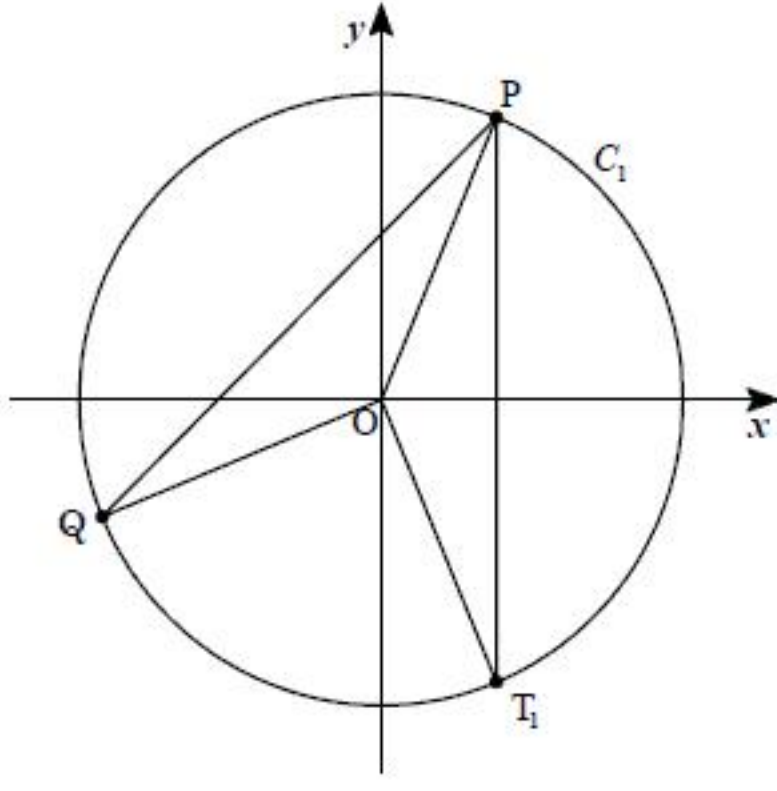
である。

(答) $\frac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{6} - \frac{8}{3}$

[2]

(1)

円 C_1 と円 C_2 の交点を考える。また、その交点のうち Q でないものを T_1 とする。



このとき、3 辺がそれぞれ等しいので、

$$\triangle POQ \equiv \triangle POT_1$$

であり、反時計まわりに測った線分 OP と x 軸のなす角が $\frac{\pi}{2} - \theta$ 、線分 OQ と x 軸のなす角が $\pi + \theta$ なので、

$$\angle POT_1 = \angle POQ = (\pi + \theta) - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\pi}{2} + 2\theta$$

である。ここで、点 $A(1, 0)$ とおくと、

$$\angle POA = \frac{\pi}{2} - \theta$$

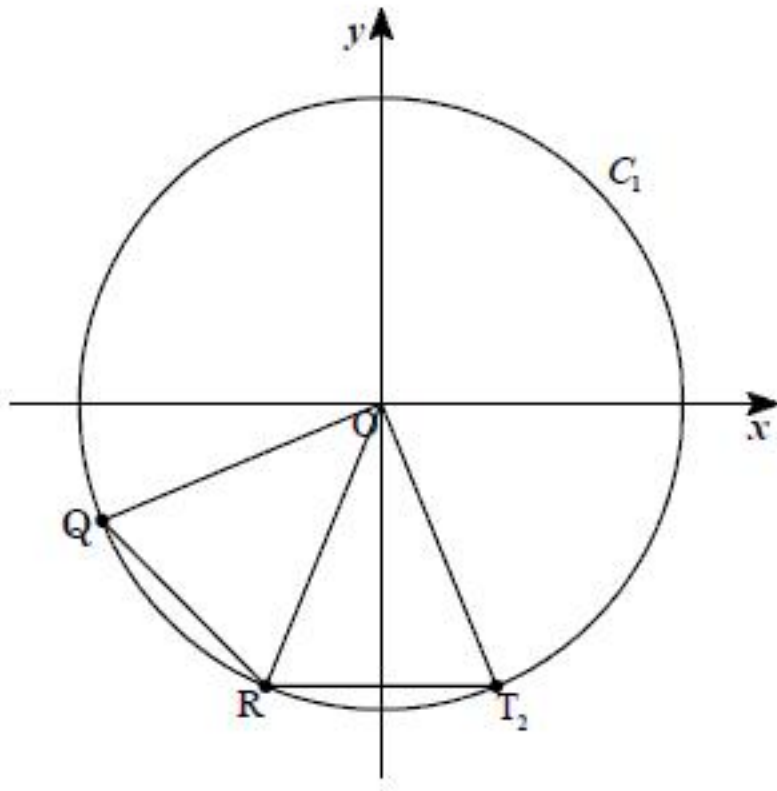
$$\begin{aligned} \angle T_1OA &= \angle POT_1 - \angle POA \\ &= \left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= 3\theta \end{aligned}$$

となる。 T_1 は円 C_1 上にあるので、 T_1 の座標は、

$$(\cos(-3\theta), \sin(-3\theta))$$

とわかる。

同様に、円 C_1 と円 C_3 の交点について考える。2 つの円の交点のうち Q でないものを T_2 とする。



このとき、3 辺が等しいので、

$$\triangle QOR \equiv \triangle T_2OR$$

であり、同様に考えて、

$$\angle T_2OR = \angle QOR = \frac{\pi}{2} - 2\theta$$

が成り立つので、こちらも同様に考え、

$$\angle T_2OA = 3\theta$$

が成り立つ。したがって、

$$T_2(\cos(-3\theta), \sin(-3\theta))$$

となり、 T_1 と T_2 が一致し、

$$T_1 = T_2 = S$$

のように点 S が決まるため、題意は示された。

(証明終)

(2)

(1)から、求める S の座標は、

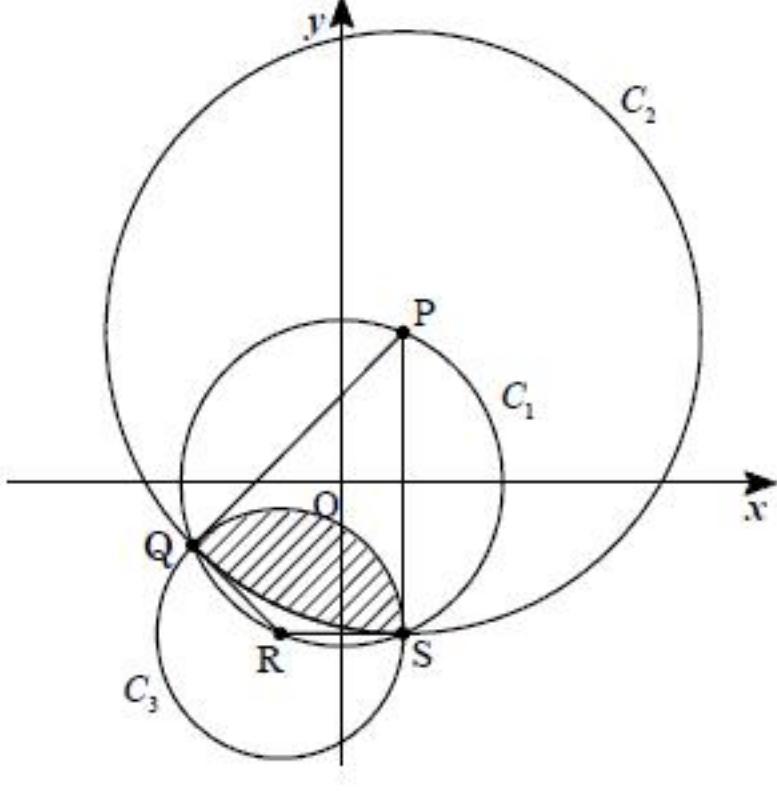
$$(\cos(-3\theta), \sin(-3\theta)) = (\cos 3\theta, -\sin 3\theta)$$

である。

(答) $(\cos 3\theta, -\sin 3\theta)$

(3)

求めるものは次図の斜線部の面積である。



ここで、円 C_2 について、その半径は、

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\cos \theta + \sin \theta)^2} \\ &= \sqrt{2(1 + \sin 2\theta)} \end{aligned}$$

である。また、(1)より、

$$\begin{aligned} \angle QOS &= \angle QOR + \angle SOR \\ &= \pi - 4\theta \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} \angle QPS &= \frac{1}{2} \angle QOS \\ &= \frac{\pi}{2} - 2\theta \end{aligned}$$

である。さらに、円 C_3 について、その半径は、

$$\begin{aligned} QR &= \sqrt{(-\cos \theta + \sin \theta)^2 + (-\sin \theta + \cos \theta)^2} \\ &= \sqrt{2(1 - \sin 2\theta)} \end{aligned}$$

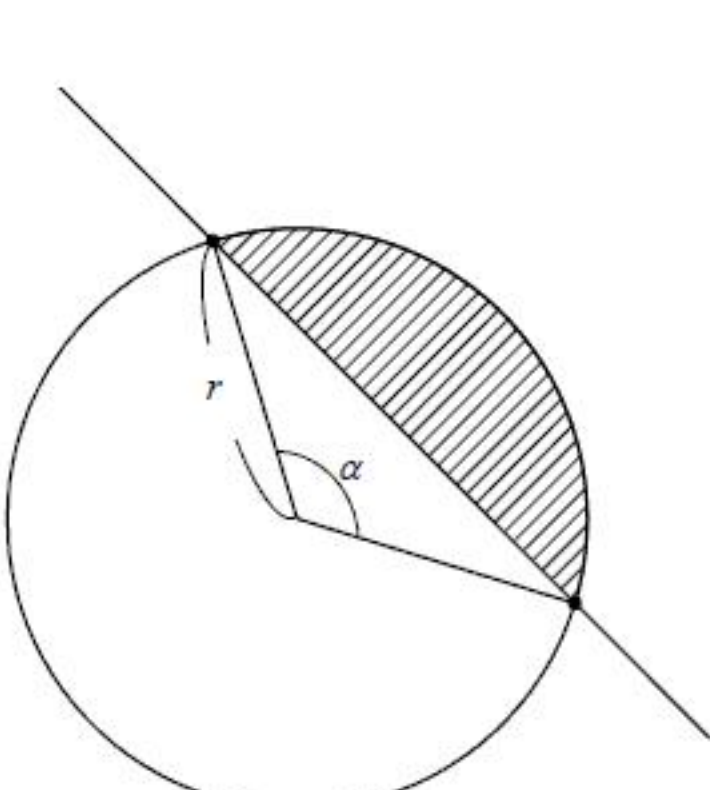
である。また、 $\angle QOS$ の大きい方の角度を ϕ とすれば、

$$\begin{aligned} \phi &= 2\pi - (\pi - 4\theta) \\ &= \pi + 4\theta \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} \angle QRS &= \frac{1}{2} \phi \\ &= \frac{\pi}{2} + 2\theta \end{aligned}$$

である。ここで、次のような図の斜線部の面積を考える。



この面積は、

$$\frac{1}{2} \alpha r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} r^2 (\alpha - \sin \alpha)$$

である。したがって、面積を求める図形を線分 QS で 2 つに分けて考えれば、求める面積は、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \cdot \left\{ \sqrt{2(1 + \sin 2\theta)} \right\}^2 \cdot \left\{ \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta \right) \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \left\{ \sqrt{2(1 - \sin 2\theta)} \right\}^2 \cdot \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + 2\theta \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2\theta \right) \right\} \\ &= \pi - 2 \cos 2\theta - 4\theta \sin 2\theta \end{aligned}$$

である。

(答) $\pi - 2 \cos 2\theta - 4\theta \sin 2\theta$

[3]

(1)

(i)

Δ の定義式より,

$$\begin{aligned}\Delta &= (s-2)(2-s) - (4-s)^2 \\ &= -2s^2 + 12s - 20 = -2 \\ &\Leftrightarrow (s-3)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow s = 3\end{aligned}$$

となる。よって,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(ii)

ケーリー・ハミルトンの定理より, E を単位行列として,

$$\begin{aligned}S^2 &= (s-2+2-s)S - \Delta E \\ &= 2E \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(iii)

(1), (2)の結果より,

$$\begin{aligned}S + S^2 + \cdots + S^{2^{n-1}} + S^{2^n} &= S(E + S^2 + \cdots + S^{2^{(n-1)}}) + S^2(E + S^2 + \cdots + S^{2^{(n-1)}}) \\ &= (S + S^2)(E + S^2 + \cdots + S^{2^{(n-1)}}) \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (1 + 2 + \cdots + 2^{n-1})E \\ &= (2^n - 1) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad (2^n - 1) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

(i)

Δ の定義式から,

$$\begin{aligned}\Delta &= (1-t)(t-1) - (t^2-1)(t+1) \\ &= -t^3 - 2t^2 + 3t \\ &= -t(t-1)(t+3) \\ &= 0 \\ \therefore t &= 0, 1, -3\end{aligned}$$

以上より,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

である。

$$(\text{答}) \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

(ii)

ケーリー・ハミルトンの定理より,

$$\begin{aligned}T^2 &= \{(1-t) + (t-1)\}T - \Delta E \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iii)

$ET = TE$ であり, (2)(ii)の結果を用いると, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}(E+T)^n &= E^n + {}_n C_1 \cdot TE^{n-1} + {}_n C_2 \cdot T^2 E^{n-2} + \cdots + T^n \\ &= E + nT + T^2 ({}_n C_2 \cdot E + \cdots + T^{n-2}) \\ &= E + nT\end{aligned}$$

である。また, $n=1$ のときもこの式は成立する。したがって,

$$\begin{aligned}(E+T)^n &= E + nT \\ &= \begin{cases} \begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{pmatrix} & (t=0) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix} & (t=1) \\ \begin{pmatrix} 4n+1 & 8n \\ -2n & -4n+1 \end{pmatrix} & (t=-3) \end{cases}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad (E+T)^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{pmatrix} & (t=0) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix} & (t=1) \\ \begin{pmatrix} 4n+1 & 8n \\ -2n & -4n+1 \end{pmatrix} & (t=-3) \end{cases}$$

[4]

(1)

$f(x)=e^x-1-xe^{\frac{x}{2}}$ とおく。

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^x - \left(e^{\frac{x}{2}} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}} \right) \\ &= e^{\frac{x}{2}} \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{x}{2} \right)\end{aligned}$$

さらに、 $g(x)=e^{\frac{x}{2}}-1-\frac{x}{2}$ とおくと、

$$g'(x)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$$

となる。したがって、次の増減表が書ける。

x		0	
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

したがって、 $g(x) \geq 0$ となるので、

$$f'(x)=e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1-\frac{x}{2}\right) \geq 0 \quad (\text{等号は } x=0 \text{ のときに成立})$$

となる。したがって、次の増減表が書ける。

x		0	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

以上より、 $f(x)>0$ となる x の範囲は、 $x>0$ である

(答) $x>0$

(2)

(1)の結果より、 $x>0$ のとき、

$$\begin{aligned}e^x-1-xe^{\frac{x}{2}} &> 0 \\ \Leftrightarrow e^x-1 &> xe^{\frac{x}{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{e^x-1}{x} &> e^{\frac{x}{2}} \quad (\because x>0)\end{aligned}$$

また、 $x<0$ のとき、

$$\begin{aligned}e^x-1-xe^{\frac{x}{2}} &< 0 \\ \Leftrightarrow e^x-1 &< xe^{\frac{x}{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{e^x-1}{x} &> e^{\frac{x}{2}} \quad (\because x<0)\end{aligned}$$

となり、まとめると、

$$\frac{e^x-1}{x} > e^{\frac{x}{2}}$$

である。

(答) $\frac{e^x-1}{x} > e^{\frac{x}{2}}$

(3)

x^p-1 と $p(x-1)x^{\frac{p-1}{2}}$ の大小がわかれば $\frac{x^p-1}{x-1}$ と $px^{\frac{p-1}{2}}$ の大小もわかるので、まず x^p-1 と

$p(x-1)x^{\frac{p-1}{2}}$ の大小を比較する。

$$\begin{aligned}h_1(x) &= x^p-1-p(x-1)x^{\frac{p-1}{2}} \\ &= x^p-1-p\left(x^{\frac{p+1}{2}}-x^{\frac{p-1}{2}}\right)\end{aligned}$$

とおくと、

$$\begin{aligned}h_1'(x) &= px^{p-1}-p \cdot \frac{p+1}{2} \cdot x^{\frac{p-1}{2}}+p \cdot \frac{p-1}{2} \cdot x^{\frac{p-3}{2}} \\ &= px^{\frac{p-3}{2}}\left\{x^{\frac{p+1}{2}}-\frac{p+1}{2}x+\frac{p-1}{2}\right\}\end{aligned}$$

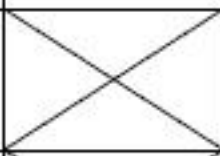
となる。さらに、

$$h_2(x)=x^{\frac{p+1}{2}}-\frac{p+1}{2}x+\frac{p-1}{2}$$

とおくと、

$$\begin{aligned}h_2'(x) &= \frac{p+1}{2}x^{\frac{p-1}{2}}-\frac{p+1}{2} \\ &= \frac{p+1}{2}\left(x^{\frac{p-1}{2}}-1\right)\end{aligned}$$

となる。したがって、 $0<p<1$ を考慮すれば、 $x>0, x \neq 1$ の範囲では次の増減表が書ける。

x	(0)	...	(1)	...
$h_2'(x)$		+	(0)	-
$h_2(x)$		$\nearrow$	(0)	$\searrow$

よって、 $h_2(x)<0$ となるので、 $h_1'(x)<0$ であり、 $h_1(x)$ は $x>0, x \neq 1$ の範囲で単調減少する。

また、

$$h_1(1)=0$$

なので、

$$h_1(x)>0 \quad (0<x<1)$$

$$h_1(x)<0 \quad (x>1)$$

である。つまり、

$$\begin{aligned}x^p-1-p(x-1)x^{\frac{p-1}{2}} &> 0 \quad (0<x<1) \\ x^p-1-p(x-1)x^{\frac{p-1}{2}} &< 0 \quad (x>1)\end{aligned}$$

である。 $0<x<1$ のとき、

$$\begin{aligned}x^p-1-p(x-1)x^{\frac{p-1}{2}} &> 0 \\ \Leftrightarrow x^p-1 &> p(x-1)x^{\frac{p-1}{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{x^p-1}{x-1} &< px^{\frac{p-1}{2}}\end{aligned}$$

また、 $x>1$ のとき、

$$\begin{aligned}x^p-1-p(x-1)x^{\frac{p-1}{2}} &< 0 \\ \Leftrightarrow x^p-1 &< p(x-1)x^{\frac{p-1}{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{x^p-1}{x-1} &< px^{\frac{p-1}{2}}\end{aligned}$$

となる。したがって、まとめると、

$$\frac{x^p-1}{x-1} < px^{\frac{p-1}{2}}$$

である。

(答) $\frac{x^p-1}{x-1} < px^{\frac{p-1}{2}}$