

[1]

(1)

1000 は 500 番目の偶数である。また、 3^k を順次計算すると、

$$3^1 = 3, 3^2 = 9, \dots, 3^6 = 729, 3^7 = 2187$$

となる。したがって、 $3^6 < 1000 < 3^7$ より、数列 $\{a_n\}$ において、 $3^1, 3^2, \dots, 3^6$ は 1000 よりも先に現れる。 $3^1, 3^2, \dots, 3^6$ は全て偶数ではないので、 $a_n = 1000$ となる n は、

$$n = 500 + 6 = 506$$

である。

(答) $n = 506$

(2)

まず、 l を自然数として 3^l と 3^{l+1} の間にある偶数の数を考える。 3^l と 3^{l+1} は共に奇数なので、 3^l と 3^{l+1} の間にある最初の偶数は $3^l + 1$ 、最後の偶数は $3^{l+1} - 1$ である。よって、 3^l と 3^{l+1} の間にある偶数の個数を p 個とすれば、

$$3^l + 1 + 2(p-1) = 3^{l+1} - 1 \Leftrightarrow p = 3^l$$

である。よって、 3^m 以下の自然数の偶数の数は、2 も偶数であることを考慮すれば、

$$1 + \sum_{l=1}^{m-1} 3^l = 1 + 3 \cdot \frac{3^{m-1} - 1}{3 - 1} = \frac{3^m - 1}{2} \text{ (個)}$$

である。また、 3^m は 3^k (k は自然数) と表される自然数のうち、 m 番目の数なので、 $a_n = 3^m$ となる n は、

$$n = m + \frac{3^m - 1}{2}$$

である。

(答) $n = m + \frac{3^m - 1}{2}$

(3)

(2) より、 $n = m + \frac{3^m - 1}{2}$ のとき、

$$a_n = 3^m$$

である。また、数列 $\{a_n\}$ から 3^k と表される項を除いてできる数列が初項 2、公差 2 の等差数列であることを考慮すれば、 $3^{m-1} < a_n < 3^m$ 、つまり n が、

$$\begin{aligned} m-1 + \frac{3^{m-1} - 1}{2} < n < m + \frac{3^m - 1}{2} \\ \Leftrightarrow m + \frac{3^{m-1} - 3}{2} < n < m + \frac{3^m - 1}{2} \end{aligned}$$

を満たす自然数のとき、

$$a_n = 2\{n - (m-1)\} = 2(n - m + 1)$$

である。

(答) $a_n = 3^m \quad \left(n = m + \frac{3^m - 1}{2}\right)$
 $a_n = 2(n - m + 1) \quad \left(m + \frac{3^{m-1} - 3}{2} < n < m + \frac{3^m - 1}{2}\right)$

(4)

S_n を偶数の和と 3^k の和に分けて考えると、

$$\begin{aligned} S_n &= (3 + 3^2 + \dots + 3^m) + \sum_{k=1}^{n-m} 2k \\ &= 3 \cdot \frac{3^m - 1}{3 - 1} + 2 \cdot \frac{(n-m)(n-m+1)}{2} \\ &= \frac{3}{2}(3^m - 1) + (n-m)(n-m+1) \end{aligned}$$

である。

(答) $S_n = \frac{3}{2}(3^m - 1) + (n-m)(n-m+1)$

[2]

(1)

(i)

Δ の定義式より,

$$\begin{aligned}\Delta &= (s-2)(2-s) - (4-s)^2 \\ &= -2s^2 + 12s - 20 = -2 \\ &\Leftrightarrow (s-3)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow s = 3\end{aligned}$$

となる。よって,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

である。

$$(答) S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(ii)

ケーリー・ハミルトンの定理より, E を単位行列として,

$$\begin{aligned}S^2 &= (s-2+2-s)S - \Delta E \\ &= 2E \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

$$(答) S^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(iii)

(1), (2)の結果より,

$$\begin{aligned}S + S^2 + \cdots + S^{2n-1} + S^{2n} &= S(E + S^2 + \cdots + S^{2(n-1)}) + S^2(E + S^2 + \cdots + S^{2(n-1)}) \\ &= (S + S^2)(E + S^2 + \cdots + S^{2(n-1)}) \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (1 + 2 + \cdots + 2^{n-1})E \\ &= (2^n - 1) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。

$$(答) (2^n - 1) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

(i)

Δ の定義式から,

$$\begin{aligned}\Delta &= (1-t)(t-1) - (t^2-1)(t+1) \\ &= -t^3 - 2t^2 + 3t \\ &= -t(t-1)(t+3) \\ &= 0 \\ \therefore t &= 0, 1, -3\end{aligned}$$

以上より,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

である。

$$(答) T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

(ii)

ケーリー・ハミルトンの定理より,

$$\begin{aligned}T^2 &= \{(1-t) + (t-1)\}T - \Delta E \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。

$$(答) T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iii)

$ET = TE$ であり, (2)(ii)の結果を用いると, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}(E+T)^n &= E^n + {}_n C_1 \cdot TE^{n-1} + {}_n C_2 \cdot T^2 E^{n-2} + \cdots + T^n \\ &= E + nT + T^2 ({}_n C_2 \cdot E + \cdots + T^{n-2}) \\ &= E + nT\end{aligned}$$

である。また, $n=1$ のときもこの式は成立する。したがって,

$$\begin{aligned}(E+T)^n &= E + nT \\ &= \begin{cases} \begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{pmatrix} & (t=0) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix} & (t=1) \\ \begin{pmatrix} 4n+1 & 8n \\ -2n & -4n+1 \end{pmatrix} & (t=-3) \end{cases}\end{aligned}$$

である。

$$(答) (E+T)^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{pmatrix} & (t=0) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix} & (t=1) \\ \begin{pmatrix} 4n+1 & 8n \\ -2n & -4n+1 \end{pmatrix} & (t=-3) \end{cases}$$

[3]

(1)

$f(x) = e^x - 1 - xe^{\frac{x}{2}}$ とおく。

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x - \left(e^{\frac{x}{2}} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}} \right) \\ &= e^{\frac{x}{2}} \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{x}{2} \right) \end{aligned}$$

さらに、 $g(x) = e^{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{x}{2}$ とおくと、

$$g'(x) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)$$

となる。したがって、次の増減表が書ける。

x		0	
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

したがって、 $g(x) \geq 0$ となるので、

$$f'(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{x}{2} \right) \geq 0 \quad (\text{等号は } x=0 \text{ のときに成立})$$

となる。したがって、次の増減表が書ける。

x		0	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

以上より、 $f(x) > 0$ となる x の範囲は、 $x > 0$ である

(答) $x > 0$

(2)

(1)の結果より、 $x > 0$ のとき、

$$\begin{aligned} e^x - 1 - xe^{\frac{x}{2}} &> 0 \\ \Leftrightarrow e^x - 1 &> xe^{\frac{x}{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{x} &> e^{\frac{x}{2}} \quad (\because x > 0) \end{aligned}$$

また、 $x < 0$ のとき、

$$\begin{aligned} e^x - 1 - xe^{\frac{x}{2}} &< 0 \\ \Leftrightarrow e^x - 1 &< xe^{\frac{x}{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{x} &> e^{\frac{x}{2}} \quad (\because x < 0) \end{aligned}$$

となり、まとめると、

$$\frac{e^x - 1}{x} > e^{\frac{x}{2}}$$

である。

(答) $\frac{e^x - 1}{x} > e^{\frac{x}{2}}$

(3)

$x^p - 1$ と $p(x-1)x^{\frac{p-1}{2}}$ の大小がわかれば $\frac{x^p - 1}{x-1}$ と $px^{\frac{p-1}{2}}$ の大小もわかるので、まず $x^p - 1$ と

$p(x-1)x^{\frac{p-1}{2}}$ の大小を比較する。

$$\begin{aligned} h_1(x) &= x^p - 1 - p(x-1)x^{\frac{p-1}{2}} \\ &= x^p - 1 - p \left(x^{\frac{p+1}{2}} - x^{\frac{p-1}{2}} \right) \end{aligned}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} h_1'(x) &= px^{p-1} - p \cdot \frac{p+1}{2} \cdot x^{\frac{p-1}{2}} + p \cdot \frac{p-1}{2} \cdot x^{\frac{p-3}{2}} \\ &= px^{\frac{p-3}{2}} \left\{ x^{\frac{p+1}{2}} - \frac{p+1}{2}x + \frac{p-1}{2} \right\} \end{aligned}$$

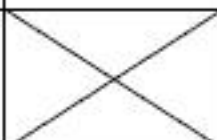
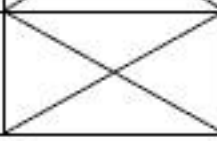
となる。さらに、

$$h_2(x) = x^{\frac{p+1}{2}} - \frac{p+1}{2}x + \frac{p-1}{2}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} h_2'(x) &= \frac{p+1}{2}x^{\frac{p-1}{2}} - \frac{p+1}{2} \\ &= \frac{p+1}{2} \left(x^{\frac{p-1}{2}} - 1 \right) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $0 < p < 1$ を考慮すれば、 $x > 0, x \neq 1$ の範囲では次の増減表が書ける。

x	(0)	...	(1)	...
$h_2'(x)$		+	(0)	-
$h_2(x)$		$\nearrow$	(0)	$\searrow$

よって、 $h_2(x) < 0$ となるので、 $h_1'(x) < 0$ であり、 $h_1(x)$ は $x > 0, x \neq 1$ の範囲で単調減少する。

また、

$$h_1(1) = 0$$

なので、

$$\begin{aligned} h_1(x) &> 0 \quad (0 < x < 1) \\ h_1(x) &< 0 \quad (x > 1) \end{aligned}$$

である。つまり、

$$\begin{aligned} x^p - 1 - p(x-1)x^{\frac{p-1}{2}} &> 0 \quad (0 < x < 1) \\ x^p - 1 - p(x-1)x^{\frac{p-1}{2}} &< 0 \quad (x > 1) \end{aligned}$$

である。 $0 < x < 1$ のとき、

$$\begin{aligned} x^p - 1 - p(x-1)x^{\frac{p-1}{2}} &> 0 \\ \Leftrightarrow x^p - 1 &> p(x-1)x^{\frac{p-1}{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{x^p - 1}{x-1} &< px^{\frac{p-1}{2}} \end{aligned}$$

また、 $x > 1$ のとき、

$$\begin{aligned} x^p - 1 - p(x-1)x^{\frac{p-1}{2}} &< 0 \\ \Leftrightarrow x^p - 1 &< p(x-1)x^{\frac{p-1}{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{x^p - 1}{x-1} &< px^{\frac{p-1}{2}} \end{aligned}$$

となる。したがって、まとめると、

$$\frac{x^p - 1}{x-1} < px^{\frac{p-1}{2}}$$

である。

(答) $\frac{x^p - 1}{x-1} < px^{\frac{p-1}{2}}$

[4]

(1)

$I = \int_0^a f(t) dt$ とおく。 $f(x+2\pi) = f(x)$ を用いると、

$$I = \int_0^a f(t) dt = \int_0^a f(t+2\pi) dt$$

となる。 I において $t' = t+2\pi$ と置換すると、 $dt = dt'$ であり積分範囲は、

$$2\pi \leq t' \leq a+2\pi$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a f(t+2\pi) dt \\ &= \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(t') dt' \\ &= \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(t) dt \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\int_0^a f(t) dt = \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(t) dt$$

となることが示された。

(証明終)

(2)

(1)で示した等式の両辺に $\int_a^{2\pi} f(t) dt$ を加えると、

$$\begin{aligned} \int_0^a f(t) dt + \int_a^{2\pi} f(t) dt &= \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(t) dt + \int_a^{2\pi} f(t) dt \\ \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} f(t) dt &= \int_a^{a+2\pi} f(t) dt \end{aligned}$$

となる。したがって、題の等式が示された。

(証明終)

(3)

$\int_0^x f(2t+x) dt$ において $t' = 2t+x$ と置換すると、 $dt' = 2dt$ であり、積分範囲は、

$$x \leq t' \leq 2\pi+x$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3 + (3x^2-1) \int_0^x f(2t+x) dt \\ &= x^3 + (3x^2-1) \cdot \frac{1}{2} \int_x^{2\pi+x} f(t') dt' \end{aligned}$$

ここで、(2)で示した等式を用いると、

$$\int_x^{x+2\pi} f(t') dt' = \int_0^{2\pi} f(t') dt' = \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

となるが、これは x によらない定数である。したがって、 $g(x)$ は3次関数である。

(証明終)

(4)

$c = \int_0^{2\pi} f(t) dt$ なので、(3)より、

$$g(x) = x^3 + (3x^2-1) \cdot \frac{c}{2}$$

となる。 $g(x)$ を x で微分すると、

$$g'(x) = 3x(x+c)$$

であり、 $c = \int_0^{2\pi} f(t') dt' > 0$ なので、次の増減表が書ける。

x		$-c$		0	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}c(c^2-1)$	$\searrow$	$-\frac{c}{2}$	$\nearrow$

したがって、求める極大値、極小値は、

$$\text{極大値： } \frac{1}{2}c(c^2-1) \quad (x=-c)$$

$$\text{極小値： } -\frac{c}{2} \quad (x=0)$$

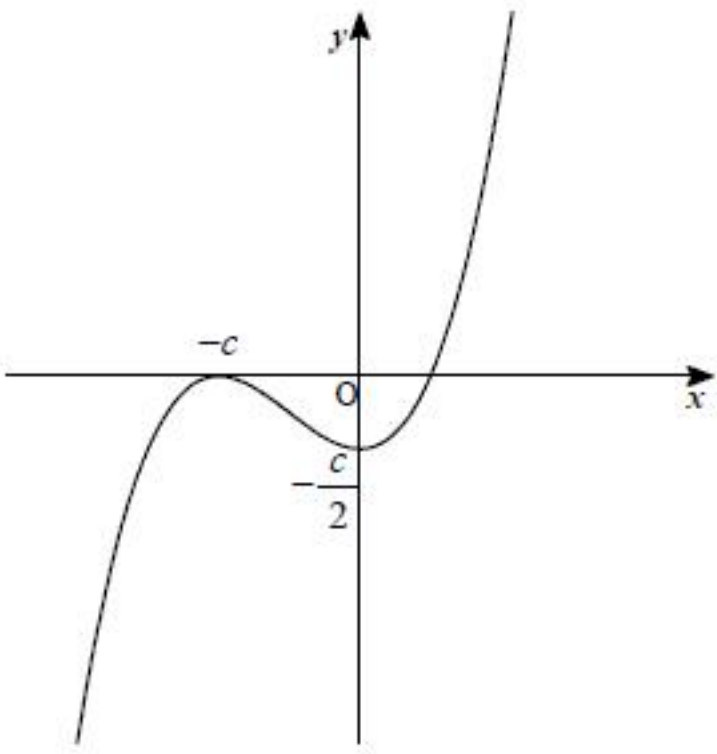
となる。

$$\text{(答) 極大値 } \frac{1}{2}c(c^2-1) \quad (x=-c)$$

$$\text{極小値 } -\frac{c}{2} \quad (x=0)$$

(5)

極小値は $-\frac{c}{2} < 0$ なので、 $g(x) = 0$ の解が2個のとき、グラフは次図のようになる。



したがって、極大値が0になればよいので、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}c(c^2-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}c(c+1)(c-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow c &= 1 \quad (\because c > 0) \end{aligned}$$

である。

(答) $c=1$