

〔 1 〕

(1)

$$f(x) = x^4 - 12x^2 + 8$$

$$f'(x) = 4x^3 - 24x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24$$

より,

$$\begin{aligned} f(x) + f''(x) &= (x^4 - 12x^2 + 8) + (12x^2 - 24) \\ &= x^4 - 16 \end{aligned}$$

であるから,

$$x^4 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-2)(x^2+4) = 0$$

x が実数のとき, 上式を満たす x は,

$$x = \pm 2$$

である。

(答) $x = \pm 2$

(2)

$$\begin{aligned} \sin \frac{19}{12} \pi &= \sin \left(\pi + \frac{7}{12} \pi \right) \\ &= -\sin \frac{7}{12} \pi \\ &= -\sin \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{3} \pi \right) \\ &= -\left(\sin \frac{1}{4} \pi \cos \frac{1}{3} \pi + \cos \frac{1}{4} \pi \sin \frac{1}{3} \pi \right) \\ &= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

(答) $-\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

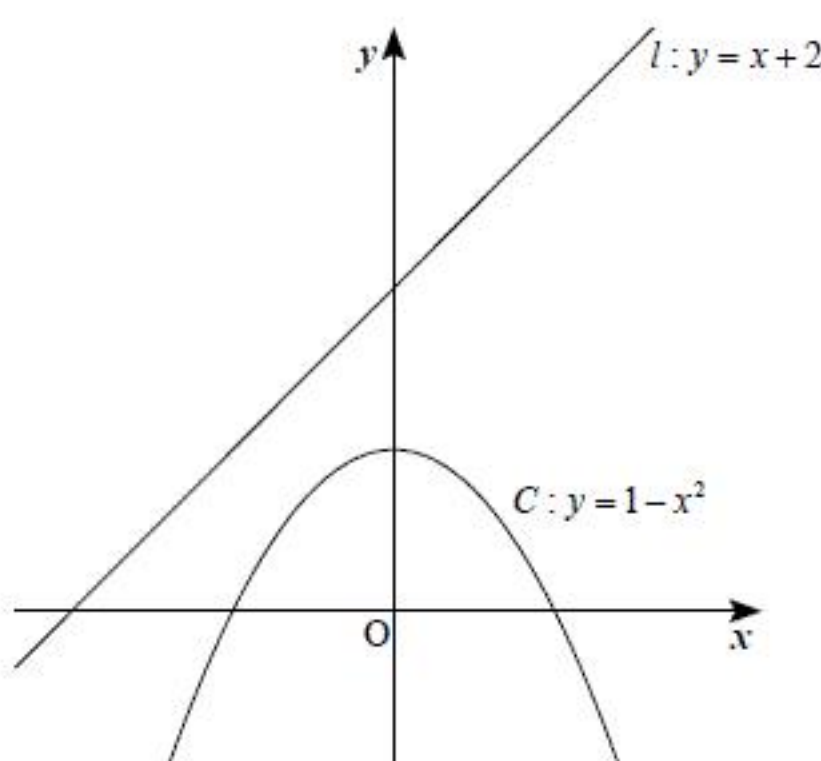
(3)

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \sin^2 x dx &= \int_0^\pi x \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi x (1 - \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi x dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi x \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^\pi - \left(\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x \sin 2x \right]_0^\pi - \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin 2x dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^\pi - \left(\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x \sin 2x \right]_0^\pi - \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^\pi \right) \\ &= \frac{1}{4} \pi^2 - (0 - 0) \\ &= \frac{1}{4} \pi^2 \end{aligned}$$

(答) $\frac{1}{4} \pi^2$

〔2〕

(1)



C の方程式において、

$$y' = -2x$$

より、 C の接線について、接点の x 座標を s と置けば、その傾きは $-2s$ となり、接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= -2s(x-s) + 1 - s^2 \\ &= -2sx + s^2 + 1 \end{aligned}$$

と表すことができる。これが点 P を通るとき、

$$\begin{aligned} t + 2 &= -2st + s^2 + 1 \\ \Leftrightarrow s^2 - 2ts - t - 1 &= 0 \end{aligned}$$

が成立し、 s は接点の x 座標であるから、この s に関する 2 次方程式の解が α 、 β である。よって、解と係数の関係から、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2t \\ \alpha\beta = -(t+1) \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成立する。

(証明終)

(2)

$Q(\alpha, 1-\alpha^2)$ 、 $R(\beta, 1-\beta^2)$ として考えて一般性を失わない。このとき、点 M の座標は

$$\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{(1-\alpha^2) + (1-\beta^2)}{2} \right) = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{2 - (\alpha^2 + \beta^2)}{2} \right)$$

と表される。この x 、 y 座標は①を用いてそれぞれ、

$$\begin{aligned} \frac{\alpha + \beta}{2} &= \frac{2t}{2} = t \\ \frac{2 - (\alpha^2 + \beta^2)}{2} &= \frac{2 - \{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}}{2} \\ &= \frac{2 - \{4t^2 + 2(t+1)\}}{2} \\ &= -2t^2 - t \end{aligned}$$

と書けるため、点 M の座標は

$$M(t, -2t^2 - t)$$

となる。これは点 M が

$$y = -2x^2 - x$$

上にあることを表している。また、 t は実数全体を取り得るので、点 M の軌跡が $y = -2x^2 - x$ であることが示された。

(証明終)

(3)

$$-2x^2 - x = -2x \left(x + \frac{1}{2} \right)$$

より、 $y = -2x^2 - x$ と x 軸との交点の x 座標は

$$x = -\frac{1}{2}, 0$$

である。 $y = -2x^2 - x$ は上に凸であるから、求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^0 (-2x^2 - x) dx &= \left[-\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-\frac{1}{2}}^0 \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{8} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{24} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{24}$

〔 3 〕

(1)

$$F(x) = x \int_0^x f(t) dt + \int_0^x (1-t) f(t) dt \quad \cdots \textcircled{1}$$

より,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^x f(t) dt + x f(x) + (1-x) f(x) \\ &= \int_0^x f(t) dt + f(x) \end{aligned}$$

$$F''(x) = f(x) + f'(x)$$

となる。

$$F'(x) = f(x) + \int_0^x f(t) dt$$

に $x=0$ を代入すると,

$$\begin{aligned} F'(0) &= f(0) + \int_0^0 f(t) dt \\ &= f(0) \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

$a=1, b=c=0$ のとき,

$$f(x) = x^2$$

であり, ①にこれを代入して,

$$\begin{aligned} F(x) &= x \int_0^x t^2 dt + \int_0^x (1-t) t^2 dt \\ &= x \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^x + \left[\frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{4} t^4 \right]_0^x \\ &= \frac{1}{3} x^4 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \\ &= \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{3} x^3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad F(x) = \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{3} x^3$$

(3)

$$F(x) = x^4 + x^2 + 26x$$

$$F'(x) = 4x^3 + 2x + 26$$

$$F''(x) = 12x^2 + 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

より, (1)から,

$$\begin{aligned} 12x^2 + 2 &= (ax^2 + bx + c) + (2ax + b) \\ &= ax^2 + (2a+b)x + b+c \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

②と③より

$$12x^2 + 2 = ax^2 + (2a+b)x + b+c$$

であり, これが x の恒等式となる必要があり, この条件は

$$\begin{cases} a=12 \\ 2a+b=0 \\ b+c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=12 \\ b=-24 \\ c=26 \end{cases}$$

と求まる。このとき,

$$f(x) = 12x^2 - 24x + 26$$

である。実際これを①に当てはめれば,

$$\begin{aligned} F(x) &= x \int_0^x (12t^2 - 24t + 26) dt + \int_0^x (1-t) (12t^2 - 24t + 26) dt \\ &= x \left[4t^3 - 12t^2 + 26t \right]_0^x + \left[-3t^4 + 12t^3 - 25t^2 + 26t \right]_0^x \\ &= 4x^4 - 12x^3 + 26x^2 + (-3x^4 + 12x^3 - 25x^2 + 26x) \\ &= x^4 + x^2 + 26x \end{aligned}$$

となり, 確かに問題文の条件を満たすことが分かる。

$$(\text{答}) \quad a=12, b=-24, c=26$$

〔4〕

(1)

与えられた漸化式に $n=1$ を代入して,

$$\begin{aligned}x_2 &= 3x_1 + \frac{1}{2^2} \\&= 3 \cdot 1 + \frac{1}{4} \\&= \frac{13}{4}\end{aligned}$$

同様に, 与えられた漸化式に $n=2$ を代入して,

$$\begin{aligned}x_3 &= 3x_2 + \frac{1}{2^3} \\&= 3 \cdot \frac{13}{4} + \frac{1}{8} \\&= \frac{79}{8}\end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad x_2 = \frac{13}{4}, \quad x_3 = \frac{79}{8}$$

(2)

$$x_{n+1} = 3x_n + \frac{1}{2^{n+1}}$$

の両辺を 3^{n+1} で割ると,

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{3^{n+1}} &= \frac{x_n}{3^n} + \frac{1}{6^{n+1}} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= a_n + \frac{1}{6^{n+1}}\end{aligned}$$

を得る。

(証明終)

(3)

(2)の結果より, $n \geq 2$ で,

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{6^{k+1}} \\&= \frac{x_1}{3} + \frac{1}{36} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{6}} \\&= \frac{11 - \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}}{30} \\&= \frac{11}{30} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6^n}\end{aligned}$$

を得る。これは $n=1$ のときも満たす。よって,

$$\begin{aligned}x_n &= 3^n \cdot a_n \\&= \frac{11}{30} \cdot 3^n - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x_n = \frac{11}{30} \cdot 3^n - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^n}$$

(4)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 3^n c) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{11}{30} \cdot 3^n - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^n} \right) - 3^n c \right\} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{11}{30} - c \right) \cdot 3^n - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^n} \right\} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{11}{30} - c \right) \cdot 3^n \right\}\end{aligned}$$

であるから, これが 0 であるためには $c = \frac{11}{30}$ であればよい。

$$(\text{答}) \quad c = \frac{11}{30}$$