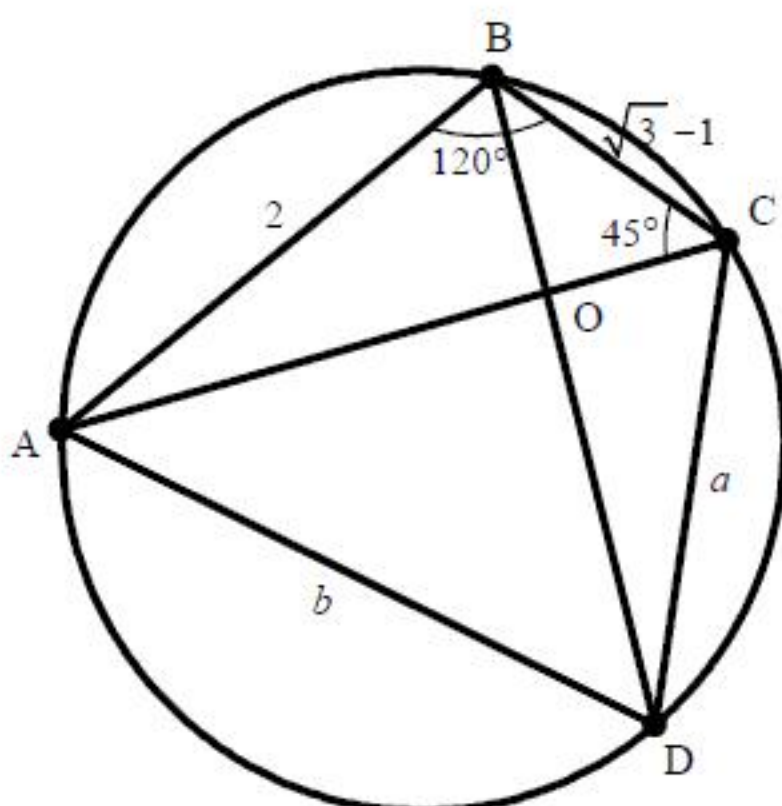


[1]



(1)

△ABC において余弦定理より、

$$\begin{aligned} AC^2 &= 2^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 - 2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \cos 120^\circ \\ &= 4 + (4 - 2\sqrt{3}) + (2\sqrt{3} - 2) \\ &= 6 \\ \therefore AC &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \cos \angle ACB &= \frac{6 + (\sqrt{3} - 1)^2 - 4}{2 \cdot \sqrt{6} \cdot (\sqrt{3} - 1)} \\ &= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{2\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \therefore \angle ACB &= 45^\circ \end{aligned}$$

となる。

(答) $AC = \sqrt{6}, \angle ACB = 45^\circ$

(2)

$\angle OCB = 45^\circ, \angle COB = 90^\circ$ であるから、△OBC は、 $OC = OB$ (・・・①)の直角二等辺三角形である。また、円周角の定理より、

$$\angle ABO = \angle DCO \text{ ・・・ ②}$$

である。さらに、

$$\angle AOB = \angle DOC = 90^\circ \text{ ・・・ ③}$$

である。したがって、①、②、③より、

$$\triangle AOB \cong \triangle DOC$$

となる。

(証明終)

(3)

△AOB ≅ △DOC より、

$$a = CD = BA = 2$$

となる。また、

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

であるから、△ACD において余弦定理より、

$$\begin{aligned} AC^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos 60^\circ \\ \Leftrightarrow 6 &= 4 + b^2 - 2b \\ \Leftrightarrow b^2 - 2b - 2 &= 0 \\ \therefore b &= 1 + \sqrt{3} \quad (\because b > 0) \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = 2, b = 1 + \sqrt{3}$

(4)

△ACD において余弦定理より、

$$\begin{aligned} AC^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos 60^\circ \\ \Leftrightarrow 6 &= a^2 + 4a^2 - 2a^2 \\ \Leftrightarrow a^2 &= 2 \\ \therefore a &= \sqrt{2} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \cos \angle DCA &= \frac{2 + 6 - 8}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = 0 \\ \therefore \angle DCA &= 90^\circ \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \angle BAD &= 180^\circ - \angle BCD \\ &= 180^\circ - (45^\circ + 90^\circ) \\ &= 45^\circ \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = \sqrt{2}, \angle DCA = 90^\circ, \angle BAD = 45^\circ$

(5)

△ABD において余弦定理より、

$$\begin{aligned} BD^2 &= 4 + 8 - 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} \cos 45^\circ = 4 \\ \therefore BD &= 2 \end{aligned}$$

である。このとき、△ABD の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} (2 + 2 + 2\sqrt{2})r \\ \Leftrightarrow 2 &= (2 + \sqrt{2})r \\ \therefore r &= \frac{2}{2 + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $r = 2 - \sqrt{2}$

[2]

(1)

取り出した 3 つの玉に書かれた 3 つの数字による集合を A 、袋に残った 2 つの玉に書かれた 2 つの数字による集合を B とする。

ここで、 m は、

$$A=\{2,1,0\} \text{ のとき最大値 } 3,$$

$$A=\{-1,0,0\} \text{ のとき最小値 } -1$$

をとる。

また、 $A=\{0,-1,1\},\{0,0,1\},\{0,0,2\}$ とすることで m は $m=0,1,2$ の値をとる。

したがって、 m の取り得る値は、

$$m=-1,0,1,2,3$$

となる。

$$\text{(答)} \quad m=-1,0,1,2,3$$

(2)

$m=3$ のとき、

$$A=\{2,1,0\}, B=\{0,-1\} \text{ であるから、} n=0 \text{ となる。}$$

$m=2$ のとき、

$$A=\{2,0,0\}, B=\{1,-1\} \text{ または } A=\{2,1,-1\}, B=\{0,0\} \text{ であるから、} n=-1,0 \text{ となる。}$$

$m=1$ のとき、

$$A=\{2,0,-1\}, B=\{1,0\} \text{ または } A=\{0,0,1\}, B=\{2,-1\} \text{ であるから、} n=0,-2 \text{ となる。}$$

$m=0$ のとき、

$$A=\{1,0,-1\}, B=\{2,0\} \text{ であるから、} n=0 \text{ となる。}$$

$m=-1$ のとき、

$$A=\{0,0,-1\}, B=\{1,2\} \text{ であるから、} n=2 \text{ となる。}$$

以上より、

$$(m,n)=(3,0),(2,-1),(2,0),(1,0),(1,-2),(0,0),(-1,2)$$

となる。

$$\text{(答)} \quad (m,n)=(3,0),(2,-1),(2,0),(1,0),(1,-2),(0,0),(-1,2)$$

(3)

(m,n) の値とその生起確率は次の表のようになる。

(m,n) の値	生起確率
$(3,0)$	$\frac{2 \cdot 1}{{}_5C_2} = \frac{1}{5}$
$(2,-1)$	$\frac{1 \cdot 1}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$
$(2,0)$	$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$
$(1,0)$	$\frac{2 \cdot 1}{{}_5C_2} = \frac{1}{5}$
$(1,-2)$	$\frac{1 \cdot 1}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$
$(0,0)$	$\frac{2 \cdot 1}{{}_5C_2} = \frac{1}{5}$
$(-1,2)$	$\frac{1 \cdot 1}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$

$$\text{(答)} \quad \text{前表の通り}$$

(4)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - mx + n \\ &= \left(x - \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} + n \\ &> 0 \end{aligned}$$

がすべての実数 x について成り立つので、

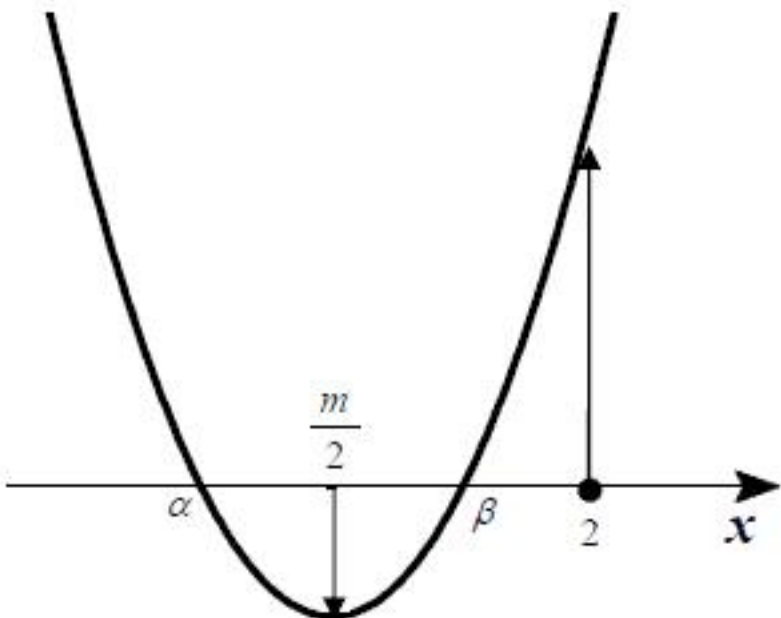
$$\begin{aligned} -\frac{m^2}{4} + n &> 0 \\ \Leftrightarrow m^2 &< 4n \end{aligned}$$

が成り立てばよい。この不等式を満たす (m,n) の値は $(m,n)=(-1,2)$ だけであるから、

求める確率は(3)より、 $\frac{1}{10}$ となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{10}$$

(5)



$\alpha < 2, \beta < 2$ となるためには、 $f(x)$ のグラフが上図のようになればよいので、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f\left(\frac{m}{2}\right) < 0 \\ \frac{m}{2} < 2 \\ f(2) > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} -\frac{m^2}{4} + n < 0 \\ m < 4 \\ 4 - 2m + n > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} m^2 > 4n \\ m < 4 \\ 2m - n < 4 \end{cases} \end{aligned}$$

である。この 3 つの不等式を満たす (m,n) の値は $(m,n)=(1,0)$ だけであるから、

求める確率は(3)より、 $\frac{1}{5}$ となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{5}$$

【3】

(1)

曲線 C について、 $y' = 2kx$ なので、 P_1 における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= 2ka_1(x - a_1) + k(a_1)^2 \\ \Leftrightarrow y &= 2ka_1x - k(a_1)^2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = 2ka_1x - k(a_1)^2$$

(2)

(1)で求めた接線が点 $(a_2, 0)$ を通るので、

$$\begin{aligned} 0 &= 2ka_1a_2 - k(a_1)^2 \\ \Leftrightarrow a_2 &= \frac{1}{2}a_1 \quad (\because a_1 \neq 0) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_2 = \frac{1}{2}a_1$$

(3)

(1), (2)と同様に考えると、

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$$

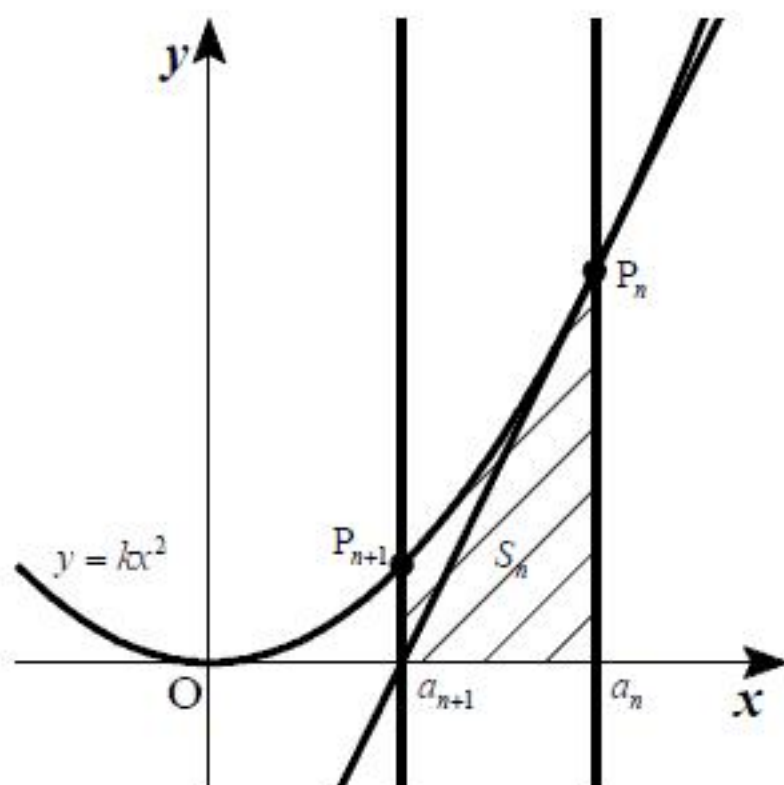
であるから、数列 $\{a_n\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。したがって、

$$a_n = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(4)



上図より、

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{a_{n+1}}^{a_n} kx^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} kx^3 \right]_{a_{n+1}}^{a_n} \\ &= \frac{k}{3} \left\{ \frac{8(a_1)^3}{2^{3n}} - \frac{(a_1)^3}{2^{3n}} \right\} \\ &= \frac{7k(a_1)^3}{3 \cdot 2^{3n}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_n = \frac{7k(a_1)^3}{3 \cdot 2^{3n}}$$

(5)

$$\begin{aligned} T_n &= S_1 + S_3 + \cdots + S_{2n-1} \\ &= \frac{7k(a_1)^3}{3} \left\{ \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^{3 \cdot 3}} + \frac{1}{2^{3 \cdot 5}} + \cdots + \frac{1}{2^{3(2n-1)}} \right\} \\ &= \frac{7k(a_1)^3}{3} \cdot \frac{1}{2^3} \left(1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^{12}} + \cdots + \frac{1}{2^{6n-6}} \right) \\ &= \frac{7k(a_1)^3}{3} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2^6}\right)^n}{1 - \frac{1}{2^6}} \\ &= \frac{8k(a_1)^3}{27} \left(1 - \frac{1}{2^{6n}} \right) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad T_n = \frac{8k(a_1)^3}{27} \left(1 - \frac{1}{2^{6n}} \right)$$

(6)

$$\begin{aligned} U_n &= S_2 + S_4 + \cdots + S_{2n} \\ &= \frac{7k(a_1)^3}{3} \left(\frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^{12}} + \cdots + \frac{1}{2^{6n}} \right) \\ &= \frac{7k(a_1)^3}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2^6} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2^6}\right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{2^6}} \\ &= \frac{k(a_1)^3}{27} \left(1 - \frac{1}{2^{6n}} \right) \end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{U_n}{T_n} = \frac{\frac{k(a_1)^3}{27} \left(1 - \frac{1}{2^{6n}} \right)}{\frac{8k(a_1)^3}{27} \left(1 - \frac{1}{2^{6n}} \right)} = \frac{1}{8}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{U_n}{T_n} = \frac{1}{8}$$