

[1]

(1)

$$\begin{aligned}\overline{PA} &= \overline{OA} - \overline{OP} = (-x, 2-y, 1) \\ \overline{PB} &= \overline{OB} - \overline{OP} = (2-x, -1-y, 2)\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \overline{PA} = (-x, 2-y, 1), \overline{PB} = (2-x, -1-y, 2)$$

(2)

条件より、 $\overline{PA} \perp \overline{PB}$ であるから、

$$\begin{aligned}\overline{PA} \cdot \overline{PB} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-x, 2-y, 1) \cdot (2-x, -1-y, 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow -x(2-x) + (2-y)(-1-y) + 1 \cdot 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - y &= 0\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad x^2 + y^2 - 2x - y = 0$$

(3)

(2)で求めた関係式を変形すると、

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 2x - y &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{5}{4} \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。また、 k を実数として、

$$2x - 3y = k \quad \cdots \textcircled{2}$$

すると、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ が共有点を持てばよいので、

$$\begin{aligned}\frac{\left|2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-3) - k\right|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} &\leq \sqrt{\frac{5}{4}} \\ \Leftrightarrow \left|k - \frac{1}{2}\right| &\leq \frac{\sqrt{65}}{2} \\ \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{65}}{2} \leq k - \frac{1}{2} &\leq \frac{\sqrt{65}}{2} \\ \therefore \frac{1 - \sqrt{65}}{2} \leq k &\leq \frac{1 + \sqrt{65}}{2}\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \frac{1 - \sqrt{65}}{2} \leq 2x - 3y \leq \frac{1 + \sqrt{65}}{2}$$

(4)

$$\begin{aligned}|\overline{PA}| &= \sqrt{x^2 + (2-y)^2 + 1} \\ &= \sqrt{(x^2 + y^2 - 2x - y) + (2x - 3y) + 5} \\ &= \sqrt{k + 5} \\ |\overline{PB}| &= \sqrt{(2-x)^2 + (-1-y)^2 + 4} \\ &= \sqrt{(x^2 + y^2 - 2x - y) - (2x - 3y) + 9} \\ &= \sqrt{-k + 9}\end{aligned}$$

である。ここで $\angle APB = 90^\circ$ であるから、 $\triangle PAB$ の面積は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot |\overline{PA}| \cdot |\overline{PB}| &= \frac{1}{2} \sqrt{k+5} \cdot \sqrt{-k+9} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-k^2 + 4k + 45} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-(k-2)^2 + 49}\end{aligned}$$

である。したがって、 $k=2$ のとき、 $\triangle PAB$ の面積は最大値 $\frac{7}{2}$ をとる。

また、このとき、

$$|\overline{PA}| = |\overline{PB}| = \sqrt{7}$$

であるから、 $\triangle PAB$ は直角二等辺三角形である。したがって、

$$\angle PAB = 45^\circ$$

となる。

$$(答) \quad \text{最大値} \frac{7}{2}, \angle PAB = 45^\circ$$

[2]

(1)

取り出した 3 つの玉に書かれた 3 つの数字による集合を A 、袋に残った 2 つの玉に書かれた 2 つの数字による集合を B とする。

ここで、 m は、

$$A = \{2, 1, 0\} \text{ のとき最大値 } 3,$$

$$A = \{-1, 0, 0\} \text{ のとき最小値 } -1$$

をとる。

また、 $A = \{0, -1, 1\}, \{0, 0, 1\}, \{0, 0, 2\}$ とすることで m は $m = 0, 1, 2$ の値をとる。

したがって、 m の取り得る値は、

$$m = -1, 0, 1, 2, 3$$

となる。

(答) $m = -1, 0, 1, 2, 3$

(2)

$m = 3$ のとき、

$$A = \{2, 1, 0\}, B = \{0, -1\} \text{ であるから、} n = 0 \text{ となる。}$$

$m = 2$ のとき、

$$A = \{2, 0, 0\}, B = \{1, -1\} \text{ または } A = \{2, 1, -1\}, B = \{0, 0\} \text{ であるから、} n = -1, 0 \text{ となる。}$$

$m = 1$ のとき、

$$A = \{2, 0, -1\}, B = \{1, 0\} \text{ または } A = \{0, 0, 1\}, B = \{2, -1\} \text{ であるから、} n = 0, -2 \text{ となる。}$$

$m = 0$ のとき、

$$A = \{1, 0, -1\}, B = \{2, 0\} \text{ であるから、} n = 0 \text{ となる。}$$

$m = -1$ のとき、

$$A = \{0, 0, -1\}, B = \{1, 2\} \text{ であるから、} n = 2 \text{ となる。}$$

以上より、

$$(m, n) = (3, 0), (2, -1), (2, 0), (1, 0), (1, -2), (0, 0), (-1, 2)$$

となる。

(答) $(m, n) = (3, 0), (2, -1), (2, 0), (1, 0), (1, -2), (0, 0), (-1, 2)$

(3)

(m, n) の値とその生起確率は次の表のようになる。

(m, n) の値	生起確率
$(3, 0)$	$\frac{2 \cdot 1}{{}_5C_2} = \frac{1}{5}$
$(2, -1)$	$\frac{1 \cdot 1}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$
$(2, 0)$	$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$
$(1, 0)$	$\frac{2 \cdot 1}{{}_5C_2} = \frac{1}{5}$
$(1, -2)$	$\frac{1 \cdot 1}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$
$(0, 0)$	$\frac{2 \cdot 1}{{}_5C_2} = \frac{1}{5}$
$(-1, 2)$	$\frac{1 \cdot 1}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$

(答) 前表の通り

(4)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - mx + n \\ &= \left(x - \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} + n \\ &> 0 \end{aligned}$$

がすべての実数 x について成り立つので、

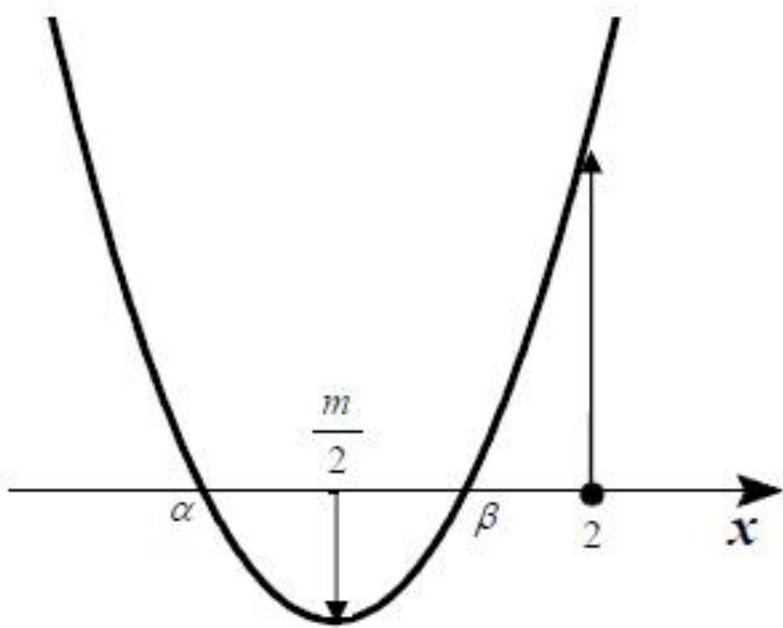
$$\begin{aligned} -\frac{m^2}{4} + n &> 0 \\ \Leftrightarrow m^2 &< 4n \end{aligned}$$

が成り立てばよい。この不等式を満たす (m, n) の値は $(m, n) = (-1, 2)$ だけであるから、

求める確率は(3)より、 $\frac{1}{10}$ となる。

(答) $\frac{1}{10}$

(5)



$\alpha < 2, \beta < 2$ となるためには、 $f(x)$ のグラフが上図のようになればよいので、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f\left(\frac{m}{2}\right) < 0 \\ \frac{m}{2} < 2 \\ f(2) > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} -\frac{m^2}{4} + n < 0 \\ m < 4 \\ 4 - 2m + n > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} m^2 > 4n \\ m < 4 \\ 2m - n < 4 \end{cases} \end{aligned}$$

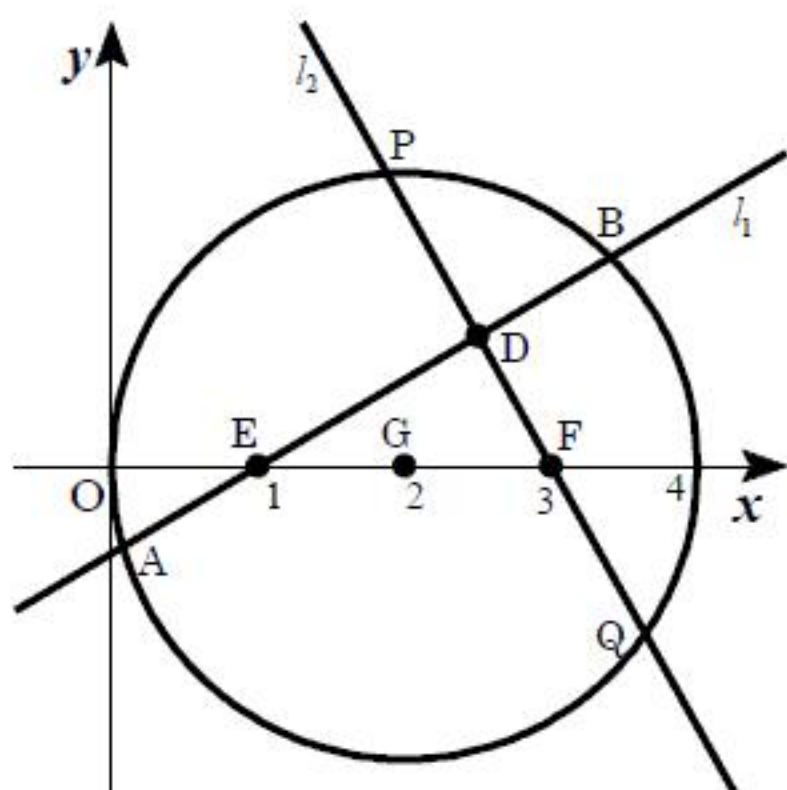
である。この 3 つの不等式を満たす (m, n) の値は $(m, n) = (1, 0)$ だけであるから、

求める確率は(3)より、 $\frac{1}{5}$ となる。

(答) $\frac{1}{5}$

[3]

(1)



$E(1,0), F(3,0), G(2,0)$ とする。

$\angle EDF = 90^\circ$ であるから、点 D は線分 EF を直径とする円の周上(ただし点 E, F は除く)にある。
したがって点 D は円 C の内部にある。

(証明終)

(2)

点 G から $l_1: kx - y - k = 0$ におろした垂線の長さを d_1 とすると、

$$d_1 = \frac{|2 \cdot k + 0 \cdot (-1) - k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|k|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

であるから、

$$\begin{aligned} AB &= 2\sqrt{AG^2 - d_1^2} \\ &= 2\sqrt{4 - \frac{k^2}{k^2 + 1}} \\ &= 2\sqrt{\frac{3k^2 + 4}{k^2 + 1}} \end{aligned}$$

となる。

(答) $AB = 2\sqrt{\frac{3k^2 + 4}{k^2 + 1}}$

(3)

点 G から $l_2: x + ky - 3 = 0$ におろした垂線の長さを d_2 とすると、

$$d_2 = \frac{|2 \cdot 1 + 0 \cdot k - 3|}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

であるから、

$$\begin{aligned} PQ &= 2\sqrt{GP^2 - d_2^2} \\ &= 2\sqrt{4 - \frac{1}{k^2 + 1}} \\ &= 2\sqrt{\frac{4k^2 + 3}{k^2 + 1}} \end{aligned}$$

となる。

(答) $PQ = 2\sqrt{\frac{4k^2 + 3}{k^2 + 1}}$

(4)

四角形 $APBQ$ の面積は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PQ &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{3k^2 + 4}{k^2 + 1}} \cdot 2\sqrt{\frac{4k^2 + 3}{k^2 + 1}} \\ &= 2\sqrt{\left(3 + \frac{1}{k^2 + 1}\right)\left(4 - \frac{1}{k^2 + 1}\right)} \\ &= 2\sqrt{-\left(\frac{1}{k^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{1}{k^2 + 1}\right) + 12} \\ &= 2\sqrt{-\left\{\left(\frac{1}{k^2 + 1}\right) - \frac{1}{2}\right\}^2 + \frac{49}{4}} \end{aligned}$$

である。ここで、 $k \neq 0$ なので、 $0 < \frac{1}{k^2 + 1} < 1$ である。したがって、

$$\frac{1}{k^2 + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \pm 1$$

のとき、四角形 $APBQ$ の面積は最大値 7 をとる。

(答) 7

[4]

(1)

$t \neq 0$ のとき,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2}t$$

であるから, l_a の傾きは $\frac{3}{2}a$ である。したがって, l_a の方程式は,

$$y = \frac{3}{2}a(x - a^2) + a^3$$

$$\therefore y = \frac{3}{2}ax - \frac{1}{2}a^3$$

となる。

(答) $y = \frac{3}{2}ax - \frac{1}{2}a^3$

(2)

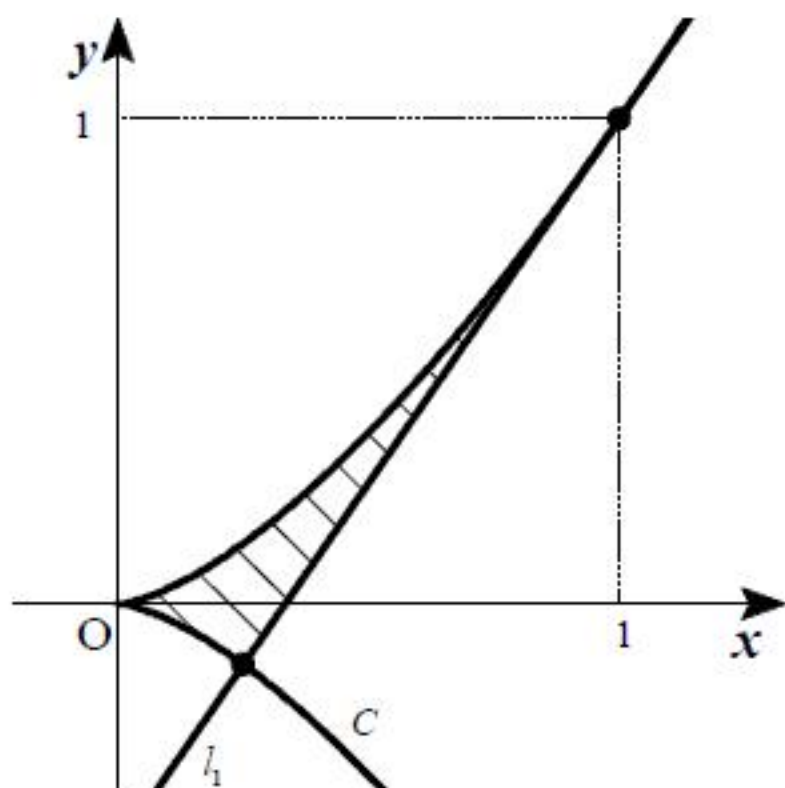
求める長さは,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt &= \int_0^1 \sqrt{9t^4 + 4t^2} dt \\ &= \int_0^1 t\sqrt{9t^2 + 4} dt \\ &= \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{18} (9t^2 + 4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \left[\frac{1}{27} (9t^2 + 4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{13\sqrt{13} - 8}{27} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{13\sqrt{13} - 8}{27}$

(3)



C と l_1 の交点の x 座標を求める。

(1)より, l_1 の方程式は, $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ であるから, この式において, $(x, y) = (t^2, t^3)$ とすると,

$$\begin{aligned} t^3 &= \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2t^3 - 3t^2 + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-1)^2(2t+1) &= 0 \\ \therefore t &= 1, -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。したがって, C と l_1 の交点の x 座標は $x = 1, \frac{1}{4}$ となる。

ゆえに, 求める面積は,

$$\begin{aligned} &2 \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx - \int_{\frac{1}{4}}^1 \left\{ \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \right) - \left(-x^{\frac{3}{2}} \right) \right\} dx \\ &= \frac{4}{5} \left[x^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 - \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x \right]_{\frac{1}{4}}^1 \\ &= \frac{4}{5} - \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{32} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{27}{320} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{27}{320}$

(4)

(3)より, C と l_1 の交点の y 座標は, $y = -\frac{1}{8}, 1$ となる。したがって, 求める体積は,

$$\begin{aligned} &\pi \int_{-\frac{1}{8}}^1 \left(\frac{2y+1}{3} \right)^2 dy - \pi \int_{-\frac{1}{8}}^0 \left(y^{\frac{2}{3}} \right)^2 dy - \pi \int_0^1 \left(y^{\frac{2}{3}} \right)^2 dy \\ &= \frac{\pi}{9} \int_{-\frac{1}{8}}^1 (2y+1)^2 dy - \pi \int_{-\frac{1}{8}}^1 y^{\frac{4}{3}} dy \\ &= \frac{\pi}{9} \left[\frac{1}{6} (2y+1)^3 \right]_{-\frac{1}{8}}^1 - \pi \left[\frac{3}{7} y^{\frac{7}{3}} \right]_{-\frac{1}{8}}^1 \\ &= \frac{\pi}{54} \left\{ 3^3 - \left(\frac{3}{4} \right)^3 \right\} - \frac{3}{7} \pi \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{8} \right)^{\frac{7}{3}} \right\} \\ &= \frac{63}{128} \pi - \frac{3 \cdot 129}{7 \cdot 128} \pi \\ &= \frac{27}{448} \pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{27}{448} \pi$