

I

(1)

$f(x) = x + \cos(2x)$ の導関数を求めると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \sin(2x) \cdot (2x)' \\ &= 1 - 2\sin 2x \end{aligned}$$

となる。

(答) $f'(x) = 1 - 2\sin 2x$

(2)

$$f''(x) = -4\cos 2x$$

となる。

(答) $f''(x) = -4\cos 2x$

(3)

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - 2\sin 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \\ f''(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow -4\cos 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\pi}{4} \\ f\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

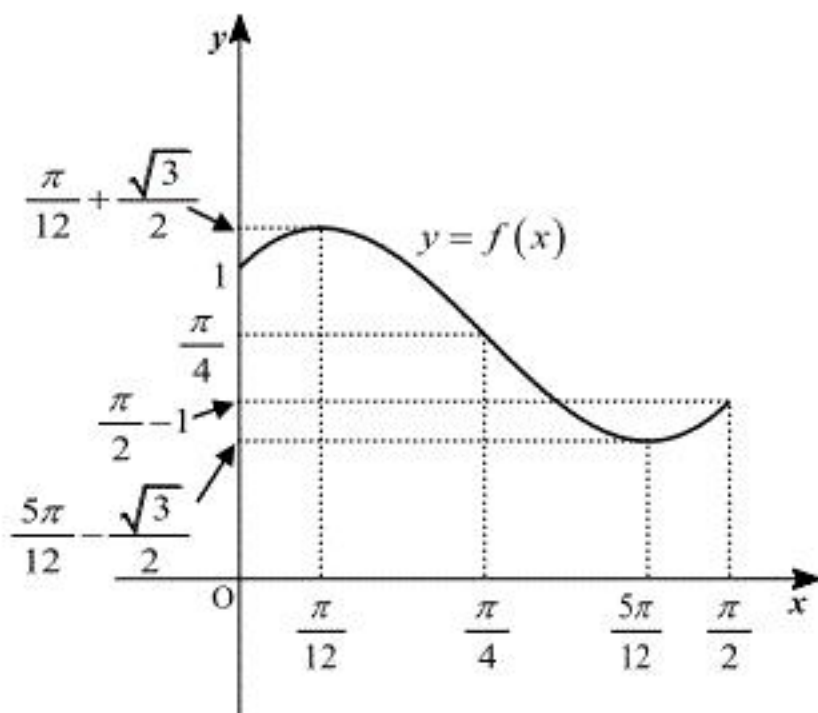
であるから、 $f(x)$ の増減表は次のとおりである。

x	0	...	$\frac{\pi}{12}$	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{5\pi}{12}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+	
$f''(x)$		-		-	0	+		+	
$f(x)$	1		$\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{\pi}{2} - 1$

(答)前表参照

(4)

(3)の増減表より、曲線 $y = f(x)$ (ただし、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) のグラフは下図のようになる。



(答)前図参照

II

(1)

$a > 0$ より

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = a \sin t + b \cos t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos t \\ \sin t = \frac{y - b \cos t}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = x \\ \sin t = \frac{y - bx}{a} \end{cases}$$

であるから、 $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ に代入することで曲線 C の方程式を求めると

$$x^2 + \left(\frac{y - bx}{a} \right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (y - bx)^2 = a^2 (1 - x^2) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

と表せる。これを y について解くと

$$y = \pm a \sqrt{1 - x^2} + bx \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (y - bx)^2 = a^2 (1 - x^2), y = \pm a \sqrt{1 - x^2} + bx$$

(2)

①式に $y = 0$ を代入すると

$$b^2 x^2 = a^2 (1 - x^2)$$

$$\therefore x = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

となり、同様に $x = 0$ を代入すると

$$y^2 = a^2$$

$$\therefore y = \pm a$$

となる。したがって、曲線 C と x 軸、 y 軸の交点はそれぞれ、

$$\left(\pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right), (0, \pm a)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \left(\pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right), (0, \pm a)$$

(3)

$x = \cos t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) であるから、

$$-1 \leq x \leq 1$$

である。したがって、 x の最大値は 1、最小値は -1 である。次に、②の両辺を x で微分して、

$$y' = \pm a \cdot \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} + b$$

となる。これに $(a, b) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ を代入すると、

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 \mp \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \right)$$

となる。 $y' = 0$ のとき、

$$1 \mp \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$$

となるから、これを解くと、

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

である。したがって、 $y = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{1 - x^2} + x)$ の増減表は次のとおりである。

x	-1	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	1
y'		+	0	-	
y	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

また、 $y = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sqrt{1 - x^2} + x)$ の増減表は次のとおりである。

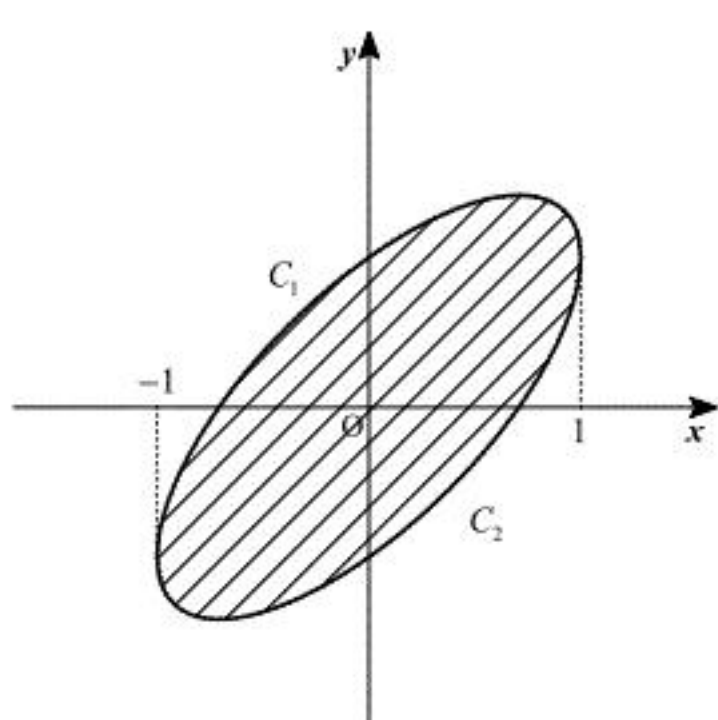
x	-1	...	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	1
y'		-	0	+	
y	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

以上より、 y の最大値は 1、最小値は -1 となる。

(答) x の最大値:1、最小値 -1、 y の最大値:1、最小値 -1

(4)

(3)より、 $C_1: y = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{1 - x^2} + x)$ 、 $C_2: y = (-\sqrt{1 - x^2} + x)$ とおくと、求める面積は下図の斜線部である。



したがって、求める面積を S とおくと、

$$S = \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{1 - x^2} + x) - \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sqrt{1 - x^2} + x) \right\} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

となる。ここで、 $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$ は半径 1 の半円の面積と等しいから

$$S = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$