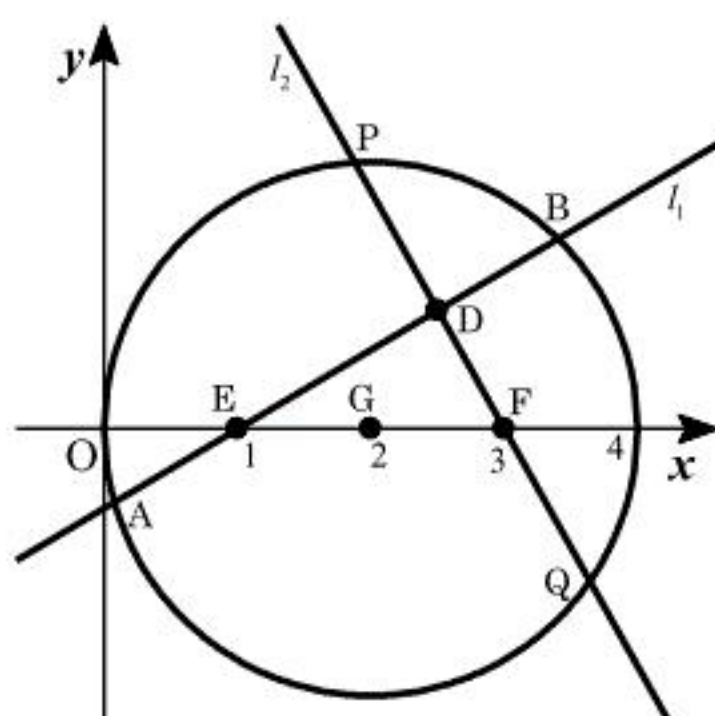


【1】

(1)



$E(1,0), F(3,0), G(2,0)$ とする。

$\angle EDF = 90^\circ$ であるから、点 D は線分 EF を直径とする円の周上(ただし点 E, F は除く)にある。
したがって点 D は円 C の内部にある。

(証明終)

(2)

点 G から $l_1: kx - y - k = 0$ におろした垂線の長さを d_1 とすると、

$$d_1 = \frac{|2 \cdot k + 0 \cdot (-1) - k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|k|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

であるから、

$$\begin{aligned} AB &= 2\sqrt{AG^2 - d_1^2} \\ &= 2\sqrt{4 - \frac{k^2}{k^2 + 1}} \\ &= 2\sqrt{\frac{3k^2 + 4}{k^2 + 1}} \end{aligned}$$

となる。

(答) $AB = 2\sqrt{\frac{3k^2 + 4}{k^2 + 1}}$

(3)

点 G から $l_2: x + ky - 3 = 0$ におろした垂線の長さを d_2 とすると、

$$d_2 = \frac{|2 \cdot 1 + 0 \cdot k - 3|}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

であるから、

$$\begin{aligned} PQ &= 2\sqrt{GP^2 - d_2^2} \\ &= 2\sqrt{4 - \frac{1}{k^2 + 1}} \\ &= 2\sqrt{\frac{4k^2 + 3}{k^2 + 1}} \end{aligned}$$

となる。

(答) $PQ = 2\sqrt{\frac{4k^2 + 3}{k^2 + 1}}$

(4)

四角形 $APBQ$ の面積は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PQ &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{3k^2 + 4}{k^2 + 1}} \cdot 2\sqrt{\frac{4k^2 + 3}{k^2 + 1}} \\ &= 2\sqrt{\left(3 + \frac{1}{k^2 + 1}\right)\left(4 - \frac{1}{k^2 + 1}\right)} \\ &= 2\sqrt{-\left(\frac{1}{k^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{1}{k^2 + 1}\right) + 12} \\ &= 2\sqrt{-\left\{\left(\frac{1}{k^2 + 1}\right) - \frac{1}{2}\right\}^2 + \frac{49}{4}} \end{aligned}$$

である。ここで、 $k \neq 0$ なので、 $0 < \frac{1}{k^2 + 1} < 1$ である。したがって、

$$\frac{1}{k^2 + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \pm 1$$

のとき、四角形 $APBQ$ の面積は最大値 7 をとる。

(答) 7

[2]

(1)

$t \neq 0$ のとき,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2}t$$

であるから, l_a の傾きは $\frac{3}{2}a$ である。したがって, l_a の方程式は,

$$y = \frac{3}{2}a(x - a^2) + a^3$$

$$\therefore y = \frac{3}{2}ax - \frac{1}{2}a^3$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{3}{2}ax - \frac{1}{2}a^3$$

(2)

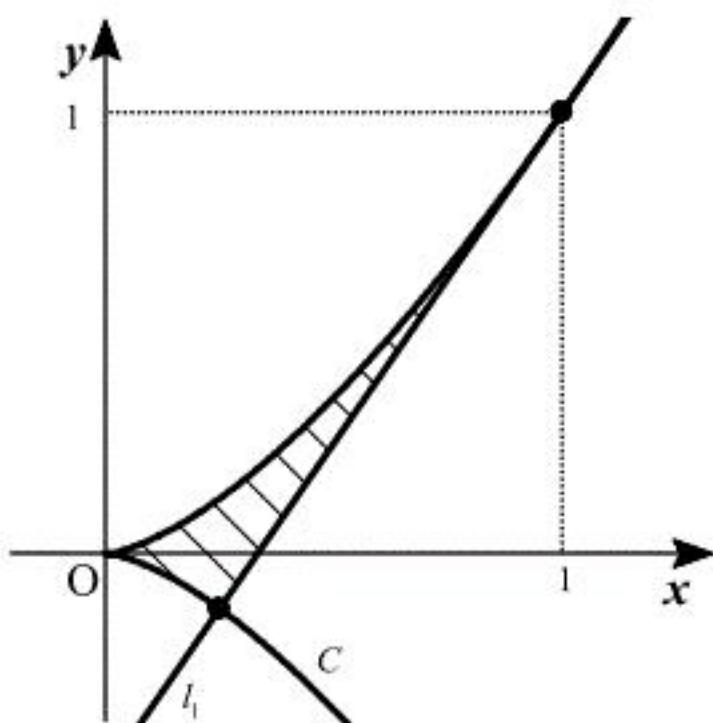
求める長さは,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt &= \int_0^1 \sqrt{9t^4 + 4t^2} dt \\ &= \int_0^1 t\sqrt{9t^2 + 4} dt \\ &= \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{18} (9t^2 + 4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \left[\frac{1}{27} (9t^2 + 4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{13\sqrt{13} - 8}{27} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{13\sqrt{13} - 8}{27}$$

(3)



C と l_1 の交点の x 座標を求める。

(1)より, l_1 の方程式は, $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ であるから, この式において, $(x, y) = (t^2, t^3)$ とすると,

$$t^3 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2t^3 - 3t^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2(2t+1) = 0$$

$$\therefore t = 1, -\frac{1}{2}$$

である。したがって, C と l_1 の交点の x 座標は $x = 1, \frac{1}{4}$ となる。

ゆえに, 求める面積は,

$$\begin{aligned} &2 \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx - \int_{\frac{1}{4}}^1 \left\{ \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \right) - \left(-x^{\frac{3}{2}} \right) \right\} dx \\ &= \frac{4}{5} \left[x^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 - \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x \right]_{\frac{1}{4}}^1 \\ &= \frac{4}{5} - \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{32} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{27}{320} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{27}{320}$$

(4)

(3)より, C と l_1 の交点の y 座標は, $y = -\frac{1}{8}, 1$ となる。したがって, 求める体積は,

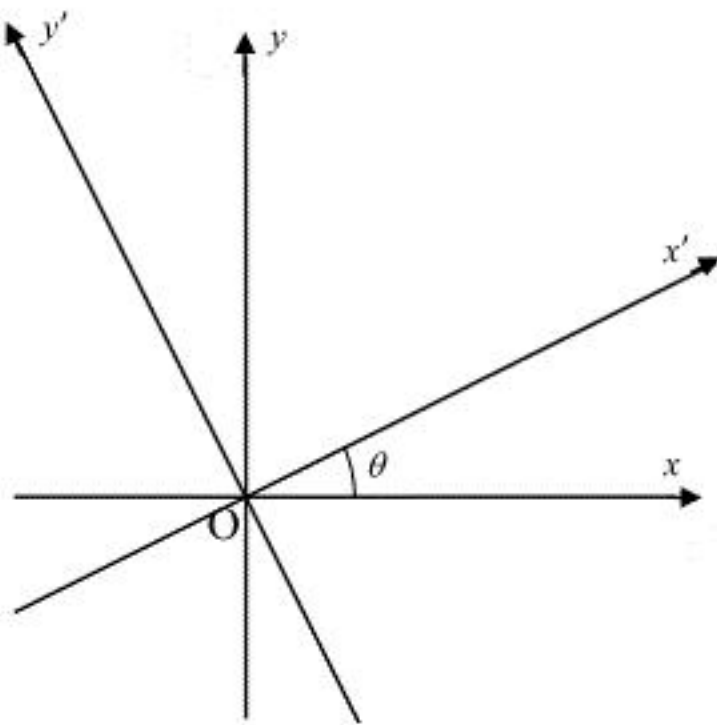
$$\begin{aligned} &\pi \int_{-\frac{1}{8}}^1 \left(\frac{2y+1}{3} \right)^2 dy - \pi \int_{-\frac{1}{8}}^0 \left(y^{\frac{2}{3}} \right)^2 dy - \pi \int_0^1 \left(y^{\frac{2}{3}} \right)^2 dy \\ &= \frac{\pi}{9} \int_{-\frac{1}{8}}^1 (2y+1)^2 dy - \pi \int_{-\frac{1}{8}}^1 y^{\frac{4}{3}} dy \\ &= \frac{\pi}{9} \left[\frac{1}{6} (2y+1)^3 \right]_{-\frac{1}{8}}^1 - \pi \left[\frac{3}{7} y^{\frac{7}{3}} \right]_{-\frac{1}{8}}^1 \\ &= \frac{\pi}{54} \left\{ 3^3 - \left(\frac{3}{4} \right)^3 \right\} - \frac{3}{7} \pi \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{8} \right)^{\frac{7}{3}} \right\} \\ &= \frac{63}{128} \pi - \frac{3 \cdot 129}{7 \cdot 128} \pi \\ &= \frac{27}{448} \pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{27}{448} \pi$$

[3]

(1)



上図のような $x'y'$ 平面を考える。

xy 平面上の点 (a, b) は、行列 $R(\theta)$ による移動で $x'y'$ 平面上の点 (a, b) に移る。

また、 $x'y'$ 平面上の点 (a, b) は、行列 $A(\theta)$ による移動で $x'y'$ 平面上の点 $(a, -b)$ に移る。

さらに、 $x'y'$ 平面上の点 $(a, -b)$ は、行列 $R^{-1}(\theta)$ による移動で xy 平面上の点 $(a, -b)$ に移る。

したがって、行列 $X = R^{-1}(\theta)A(\theta)R(\theta)$ は x 軸に関する対称移動を表すので、

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} XR(s)X &= R(t) \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos s = \cos t \\ \sin s = -\sin t \end{cases} \end{aligned}$$

$$\therefore t = -s + 2n\pi \quad (n : \text{整数})$$

となる。

$$(\text{答}) \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad t = -s + 2n\pi \quad (n : \text{整数})$$

(2)

$$\begin{aligned} A(\theta) &= R(\theta)XR^{-1}(\theta) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2\sin \theta \cos \theta \\ 2\sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} A(\alpha)A(\beta) &= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\alpha \sin 2\beta & \cos 2\alpha \sin 2\beta - \sin 2\alpha \cos 2\beta \\ \sin 2\alpha \cos 2\beta - \cos 2\alpha \sin 2\beta & \sin 2\alpha \sin 2\beta + \cos 2\alpha \cos 2\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha - \beta) & -\sin 2(\alpha - \beta) \\ \sin 2(\alpha - \beta) & \cos 2(\alpha - \beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A(\alpha)A(\beta) = \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha - \beta) & -\sin 2(\alpha - \beta) \\ \sin 2(\alpha - \beta) & \cos 2(\alpha - \beta) \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{aligned} A(\alpha)A(\beta) &= A(\beta)A(\alpha) \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha - \beta) & -\sin 2(\alpha - \beta) \\ \sin 2(\alpha - \beta) & \cos 2(\alpha - \beta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 2(\beta - \alpha) & -\sin 2(\beta - \alpha) \\ \sin 2(\beta - \alpha) & \cos 2(\beta - \alpha) \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2(\alpha - \beta) = \cos 2(\beta - \alpha) \\ \sin 2(\alpha - \beta) = \sin 2(\beta - \alpha) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2(\alpha - \beta) = \cos 2(\alpha - \beta) \\ \sin 2(\alpha - \beta) = -\sin 2(\alpha - \beta) \end{cases} \\ \therefore \sin 2(\alpha - \beta) &= 0 \end{aligned}$$

ここで、 $0 < \alpha - \beta < \pi \Leftrightarrow 0 < 2(\alpha - \beta) < 2\pi$ であるから、

$$2(\alpha - \beta) = \pi \Leftrightarrow \alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$$

(4)

①

$\tan \beta = \frac{3 \tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 3}$ であるから、

$$\begin{aligned} \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\tan \alpha - \frac{3 \tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 3}}{1 + \tan \alpha \cdot \frac{3 \tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 3}} \\ &= \frac{\tan^2 \alpha + 1}{3 \tan^2 \alpha + 3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$$

②

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2(\alpha - \beta) &= \frac{1}{\cos^2(\alpha - \beta)} \\ \Leftrightarrow \cos^2(\alpha - \beta) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9}{10} \\ \therefore \cos(\alpha - \beta) &= \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \left(\because 0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

である。また、

$$\sin(\alpha - \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha - \beta)} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \sin 2(\alpha - \beta) &= 2 \sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha - \beta) \\ &= 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{3}{5} \\ \cos 2(\alpha - \beta) &= 2 \cos^2(\alpha - \beta) - 1 \\ &= 2 \cdot \frac{9}{10} - 1 \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$A(\alpha)A(\beta) = \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha - \beta) & -\sin 2(\alpha - \beta) \\ \sin 2(\alpha - \beta) & \cos 2(\alpha - \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A(\alpha)A(\beta) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

【4】

(1)

a, b を自然数とすると,

$$\begin{cases} p = am + r \\ q = bm + s \end{cases}$$

と書けるので,

$$pq - rs = (am + r)(bm + s) - rs = m(abm + a + b)$$

となる。したがって, $pq - rs$ は m の倍数である。

(証明終)

(2)

A を自然数とすると,

$$\begin{aligned} 3^n &= (4-1)^n \\ &= \sum_{k=0}^n {}_n C_k \cdot 4^{n-k} \cdot (-1)^k \\ &= 4A + (-1)^n \end{aligned}$$

と書ける。したがって, 3^n を 4 で割ったときの余りは,

$$n \text{ が奇数のとき } 3, \quad n \text{ が偶数のとき } 1$$

となる。

(答) n が奇数のとき 3, n が偶数のとき 1

(3)

$$\begin{aligned} (1+r)^{2n} &= \sum_{k=0}^n {}_{2n} C_k \cdot 1^{2n-k} \cdot r^k = \sum_{k=0}^n {}_{2n} C_k \cdot r^k \\ (1-r)^{2n} &= \sum_{k=0}^n {}_{2n} C_k \cdot 1^{2n-k} \cdot (-r)^k = \sum_{k=0}^n {}_{2n} C_k \cdot (-r)^k \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} (1+r)^{2n} - (1-r)^{2n} &= \sum_{k=0}^n {}_{2n} C_k \cdot r^k \cdot \{1 - (-1)^k\} \\ &= 2({}_{2n} C_1 \cdot r^1 + {}_{2n} C_3 \cdot r^3 + \cdots + {}_{2n} C_{2n-1} \cdot r^{2n-1}) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n {}_{2n} C_{2k-1} \cdot r^{2k-1} \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n {}_{2n} C_{2k-1} \cdot r^{2k-1} = \frac{1}{2} \{(1+r)^{2n} - (1-r)^{2n}\}$$

となる。

$$(答) \sum_{k=1}^n {}_{2n} C_{2k-1} \cdot r^{2k-1} = \frac{1}{2} \{(1+r)^{2n} - (1-r)^{2n}\}$$

(4)

X_n を 4 で割った余りが 3 であるから X_n は奇数である。

したがって, 出た目は 1, 3, 5 のいずれかである。

ここで, x, y, z を 0 以上の整数とし, 1 が x 回, 3 が y 回, 5 が z 回出たとすると,

B, C, D を自然数として,

$$\begin{aligned} X_n &= 1^x \cdot 3^y \cdot 5^z \\ &= (4-1)^y (4+1)^z \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^y {}_y C_k \cdot 4^{y-k} \cdot (-1)^k \right\} \left\{ \sum_{k=0}^z {}_z C_k \cdot 4^{z-k} \cdot 1^k \right\} \\ &= \{4B + (-1)^y\} (4C + 1) \\ &= 4D + (-1)^y \end{aligned}$$

と書ける。したがって, X_n を 4 で割った余りが 3 であるためには y が奇数であればよい。

ここで, $y = 2l - 1$ ($l = 1, 2, \dots, n$) とおくと,

$$\begin{aligned} P_n &= \sum_{l=1}^n {}_{2n} C_{2l-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2l-1} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^{2n-(2l-1)} \\ &= \sum_{l=1}^n {}_{2n} C_{2l-1} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^{2n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2l-1} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \sum_{l=1}^n {}_{2n} C_{2l-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2l-1} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{2n} - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2n} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{1}{6}\right)^{2n} \right\} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) P_n = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{1}{6}\right)^{2n} \right\}$$