

〔1〕

(1)

$$6\sin^2 x + 5\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow (-2\cos x - 1)(3\cos x - 4) = 0 \text{ より, } \cos x = -\frac{1}{2}, \frac{4}{3} \text{ であり, } 0 \leq x < 2\pi$$

を考えると, $x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ となる。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

(2)

$\triangle ABC$ の面積は $\frac{7}{2}$ であるから, 求める四面体 $ABCD$ の体積は,

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{2} \cdot 9 = \frac{21}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{21}{2}$$

(3)

求める自然数 m は $m = 77k + 58$ (k は整数) とかけるが, $1 \leq m \leq 300$ なので,
 $m = 58, 135, 212, 289$ である。

$$(\text{答}) \quad m = 58, 135, 212, 289$$

[2]

(1)

$$A+B=3E \cdots (\alpha)$$

$$pA-B=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \cdots (\beta)$$

$$(\alpha)+(\beta) \text{ より, } (p+1)A=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

$$p \times (\alpha) - (\beta) \text{ より, } (p+1)B=\begin{pmatrix} 3p & 3 \\ 6 & 3(p-1) \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

(証明終)

(2)

$$AB=O \text{ より}$$

$$(p+1)^2 AB=O \Leftrightarrow 9(p-2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=O$$

よって, $p=2$ である。

このとき(1)の結果から

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p=2, A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(3)

(α) より任意の自然数 n に対して, $A^n(A+B)=3A^n$ であるが, $AB=O$ なので

$$A^n(A+B)=3A^n \Leftrightarrow A^{n+1}=3A^n$$

となる。よって, $A^n=3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ である。

$$(\text{答}) \quad A^n=3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

〔3〕

(1)

2式から y を消去すると,

$$(1-\sqrt{3})x+1+\sqrt{3} = -x^2+3x \Leftrightarrow \{x-(1+\sqrt{3})\}(x-1)=0$$

なので $x=1, 1+\sqrt{3}$ である。

よって交点は $(1, 2), (1+\sqrt{3}, -1+\sqrt{3})$ となる。

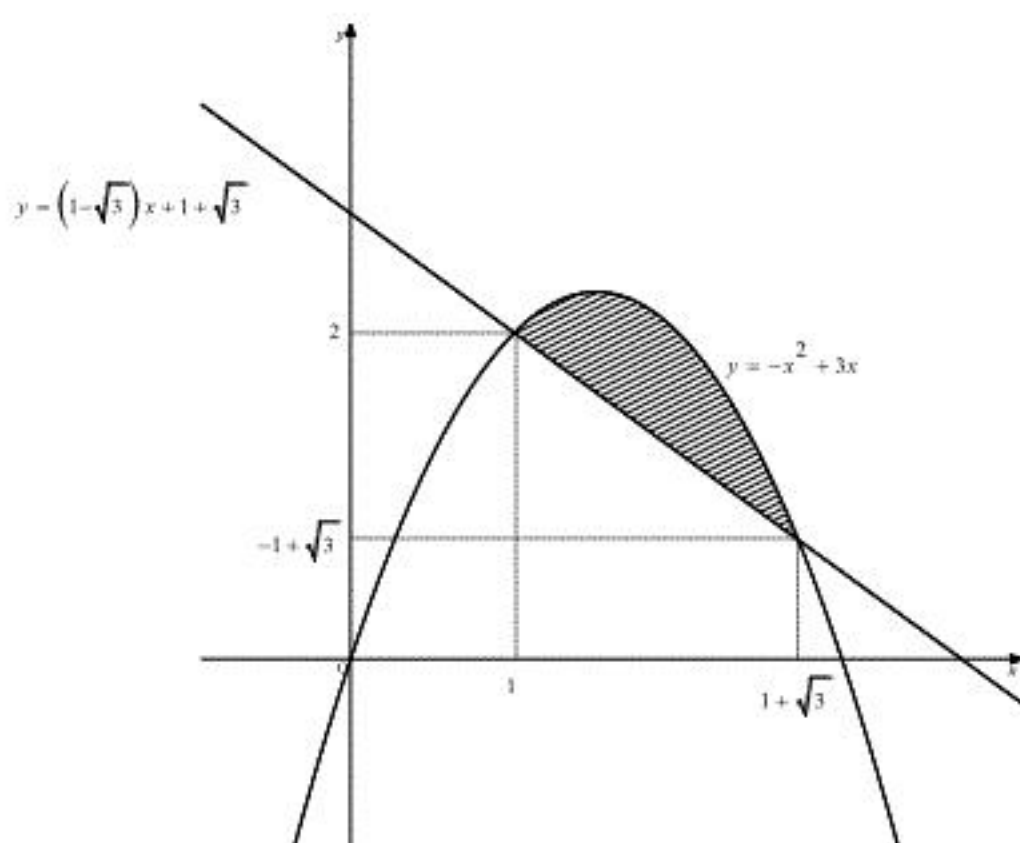
(答) $(1, 2), (1+\sqrt{3}, -1+\sqrt{3})$

(2)

(i)

領域 D を図示すると以下のようになる。

斜線部, 境界含む。



領域 D の面積は

$$\int_1^{1+\sqrt{3}} \{-x^2+3x-(1-\sqrt{3})x-1-\sqrt{3}\} dx = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。

(答) 前図, $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(ii)

$\frac{y}{x} = k$ において, 直線 $y = kx$ が D と共有点をもつような k の最大値, 最小値を求めれば良

い。よって,

最大値は直線 $y = kx$ が $(1, 2)$ を通る時で, $k = 2$ である。

最小値は直線 $y = kx$ が $(1+\sqrt{3}, -1+\sqrt{3})$ を通る時で, $k = \frac{-1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$

(答) 最大値 2 最小値 $2-\sqrt{3}$

〔4〕

(1)

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ なので求める接線の方程式は

$$y = -\frac{1}{t^2}(x-t) + \frac{1}{t} \Leftrightarrow y = -\frac{x}{t^2} + \frac{2}{t}$$

となる。

(証明終)

(2)

(1)より直線 l の傾きは $-\frac{1}{t^2}$ なので、直線 OH の方程式は $y = t^2x$ である。

直線 l と直線 OH の交点を求めると、 y を消去して

$$t^2x = -\frac{x}{t^2} + \frac{2}{t} \Leftrightarrow x = \frac{2t}{1+t^4}$$

となるので、交点は $\left(\frac{2t}{1+t^4}, \frac{2t^3}{1+t^4}\right)$ となる。

(証明終)

(3)

(i)

$$\tan \theta = \frac{\frac{2t^3}{1+t^4}}{\frac{2t}{1+t^4}} = t^2$$

であり、

$$d^2 = \left(\frac{2t}{1+t^4}\right)^2 + \left(\frac{2t^3}{1+t^4}\right)^2 = \frac{4t^2}{1+t^4} = 4 \sin \theta \cos \theta$$

となる。

(答) $t^2 = \tan \theta, d^2 = 4 \sin \theta \cos \theta$

(ii)

$$\frac{d^2}{\theta} = 4 \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \cos \theta$$

より、 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{d^2}{\theta} = 4$ となる。

(答) 4