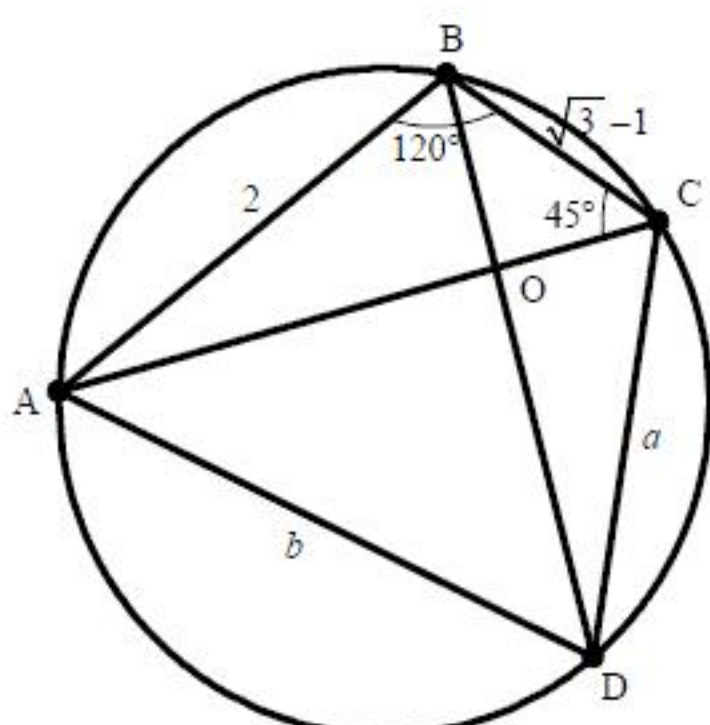


[1]



(1)

△ABC において余弦定理より,

$$\begin{aligned} AC^2 &= 2^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 - 2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \cos 120^\circ \\ &= 4 + (4 - 2\sqrt{3}) + (2\sqrt{3} - 2) \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\therefore AC = \sqrt{6}$$

となる。また,

$$\begin{aligned} \cos \angle ACB &= \frac{6 + (\sqrt{3} - 1)^2 - 4}{2 \cdot \sqrt{6} \cdot (\sqrt{3} - 1)} \\ &= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{2\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\therefore \angle ACB = 45^\circ$$

となる。

(答) $AC = \sqrt{6}, \angle ACB = 45^\circ$

(2)

$\angle OCB = 45^\circ, \angle COB = 90^\circ$ であるから, △OBC は, $OC = OB$ (・・・①)の直角二等辺三角形である。また, 円周角の定理より,

$$\angle ABO = \angle DCO \text{ ・・・②}$$

である。さらに,

$$\angle AOB = \angle DOC = 90^\circ \text{ ・・・③}$$

である。したがって, ①, ②, ③より,

$$\triangle AOB \equiv \triangle DOC$$

となる。

(証明終)

(3)

$\triangle AOB \equiv \triangle DOC$ より,

$$a = CD = BA = 2$$

となる。また,

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

であるから, △ACD において余弦定理より,

$$\begin{aligned} AC^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos 60^\circ \\ \Leftrightarrow 6 &= 4 + b^2 - 2b \\ \Leftrightarrow b^2 - 2b - 2 &= 0 \\ \therefore b &= 1 + \sqrt{3} \quad (\because b > 0) \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = 2, b = 1 + \sqrt{3}$

(4)

△ACD において余弦定理より,

$$\begin{aligned} AC^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos 60^\circ \\ \Leftrightarrow 6 &= a^2 + 4a^2 - 2a^2 \\ \Leftrightarrow a^2 &= 2 \\ \therefore a &= \sqrt{2} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

となる。また,

$$\begin{aligned} \cos \angle DCA &= \frac{2 + 6 - 8}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = 0 \\ \therefore \angle DCA &= 90^\circ \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} \angle BAD &= 180^\circ - \angle BCD \\ &= 180^\circ - (45^\circ + 90^\circ) \\ &= 45^\circ \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = \sqrt{2}, \angle DCA = 90^\circ, \angle BAD = 45^\circ$

(5)

△ABD において余弦定理より,

$$\begin{aligned} BD^2 &= 4 + 8 - 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} \cos 45^\circ = 4 \\ \therefore BD &= 2 \end{aligned}$$

である。このとき, △ABD の面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} (2 + 2 + 2\sqrt{2})r \\ \Leftrightarrow 2 &= (2 + \sqrt{2})r \\ \therefore r &= \frac{2}{2 + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $r = 2 - \sqrt{2}$

[2]

(1)

取り出した 3 つの玉に書かれた 3 つの数字による集合を A 、袋に残った 2 つの玉に書かれた 2 つの数字による集合を B とする。

ここで、 m は、

$$A=\{2,1,0\} \text{ のとき最大値 } 3,$$

$$A=\{-1,0,0\} \text{ のとき最小値 } -1$$

をとる。

また、 $A=\{0,-1,1\},\{0,0,1\},\{0,0,2\}$ とすることで m は $m=0,1,2$ の値をとる。

したがって、 m の取り得る値は、

$$m=-1,0,1,2,3$$

となる。

(答) $m=-1,0,1,2,3$

(2)

$m=3$ のとき、

$A=\{2,1,0\}, B=\{0,-1\}$ であるから、 $n=0$ となる。

$m=2$ のとき、

$A=\{2,0,0\}, B=\{1,-1\}$ または $A=\{2,1,-1\}, B=\{0,0\}$ であるから、 $n=-1,0$ となる。

$m=1$ のとき、

$A=\{2,0,-1\}, B=\{1,0\}$ または $A=\{0,0,1\}, B=\{2,-1\}$ であるから、 $n=0,-2$ となる。

$m=0$ のとき、

$A=\{1,0,-1\}, B=\{2,0\}$ であるから、 $n=0$ となる。

$m=-1$ のとき、

$A=\{0,0,-1\}, B=\{1,2\}$ であるから、 $n=2$ となる。

以上より、

$$(m,n)=(3,0),(2,-1),(2,0),(1,0),(1,-2),(0,0),(-1,2)$$

となる。

(答) $(m,n)=(3,0),(2,-1),(2,0),(1,0),(1,-2),(0,0),(-1,2)$

(3)

(m,n) の値とその生起確率は次の表のようになる。

(m,n) の値	生起確率
$(3,0)$	$\frac{2 \cdot 1}{{}_5C_2} = \frac{1}{5}$
$(2,-1)$	$\frac{1 \cdot 1}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$
$(2,0)$	$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$
$(1,0)$	$\frac{2 \cdot 1}{{}_5C_2} = \frac{1}{5}$
$(1,-2)$	$\frac{1 \cdot 1}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$
$(0,0)$	$\frac{2 \cdot 1}{{}_5C_2} = \frac{1}{5}$
$(-1,2)$	$\frac{1 \cdot 1}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$

(答) 前表の通り

(4)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - mx + n \\ &= \left(x - \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} + n \\ &> 0 \end{aligned}$$

がすべての実数 x について成り立つので、

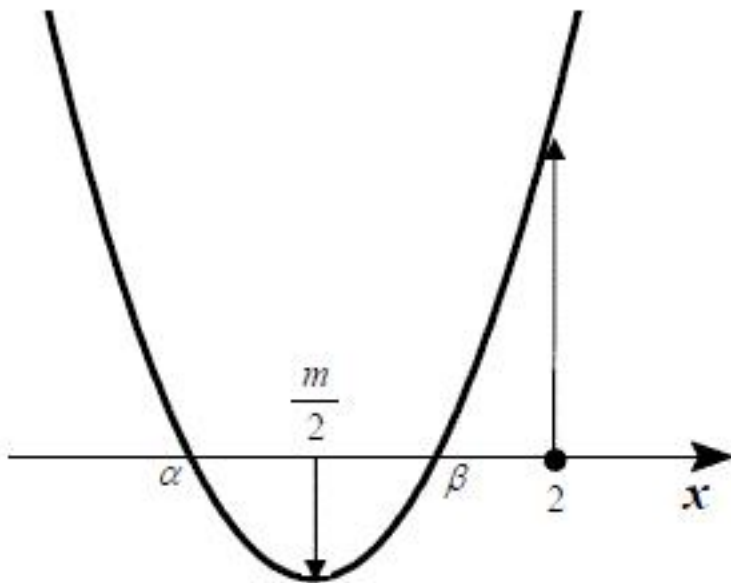
$$\begin{aligned} -\frac{m^2}{4} + n &> 0 \\ \Leftrightarrow m^2 &< 4n \end{aligned}$$

が成り立てばよい。この不等式を満たす (m,n) の値は $(m,n)=(-1,2)$ だけであるから、

求める確率は(3)より、 $\frac{1}{10}$ となる。

(答) $\frac{1}{10}$

(5)



$\alpha < 2, \beta < 2$ となるためには、 $f(x)$ のグラフが上図のようになればよいので、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f\left(\frac{m}{2}\right) < 0 \\ \frac{m}{2} < 2 \\ f(2) > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} -\frac{m^2}{4} + n < 0 \\ m < 4 \\ 4 - 2m + n > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} m^2 > 4n \\ m < 4 \\ 2m - n < 4 \end{cases} \end{aligned}$$

である。この 3 つの不等式を満たす (m,n) の値は $(m,n)=(1,0)$ だけであるから、

求める確率は(3)より、 $\frac{1}{5}$ となる。

(答) $\frac{1}{5}$

【3】

(1)

曲線 C について、 $y' = 2kx$ なので、 P_1 における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= 2ka_1(x - a_1) + k(a_1)^2 \\ \Leftrightarrow y &= 2ka_1x - k(a_1)^2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $y = 2ka_1x - k(a_1)^2$

(2)

(1)で求めた接線が点 $(a_2, 0)$ を通るので、

$$\begin{aligned} 0 &= 2ka_1a_2 - k(a_1)^2 \\ \Leftrightarrow a_2 &= \frac{1}{2}a_1 \quad (\because a_1 \neq 0) \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_2 = \frac{1}{2}a_1$

(3)

(1), (2)と同様に考えると、

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$$

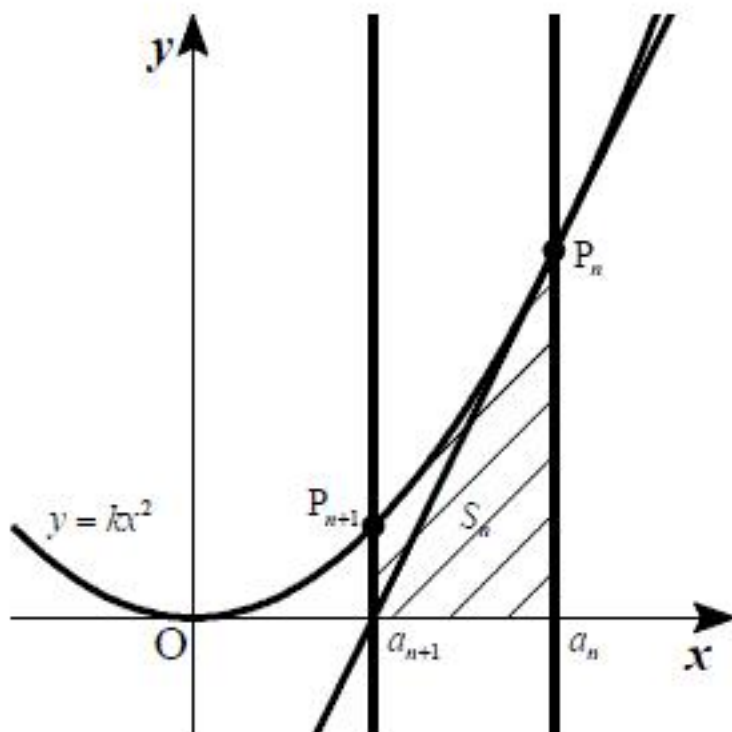
であるから、数列 $\{a_n\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。したがって、

$$a_n = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

となる。

(答) $a_n = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(4)



上図より、

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{a_{n+1}}^{a_n} kx^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}kx^3 \right]_{a_{n+1}}^{a_n} \\ &= \frac{k}{3} \left\{ \frac{8(a_1)^3}{2^{3n}} - \frac{(a_1)^3}{2^{3n}} \right\} \\ &= \frac{7k(a_1)^3}{3 \cdot 2^{3n}} \end{aligned}$$

となる。

(答) $S_n = \frac{7k(a_1)^3}{3 \cdot 2^{3n}}$

(5)

$$\begin{aligned} T_n &= S_1 + S_3 + \cdots + S_{2n-1} \\ &= \frac{7k(a_1)^3}{3} \left\{ \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^{3 \cdot 3}} + \frac{1}{2^{3 \cdot 5}} + \cdots + \frac{1}{2^{3(2n-1)}} \right\} \\ &= \frac{7k(a_1)^3}{3} \cdot \frac{1}{2^3} \left(1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^{12}} + \cdots + \frac{1}{2^{6n-6}} \right) \\ &= \frac{7k(a_1)^3}{3} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2^6}\right)^n}{1 - \frac{1}{2^6}} \\ &= \frac{8k(a_1)^3}{27} \left(1 - \frac{1}{2^{6n}} \right) \end{aligned}$$

となる。

(答) $T_n = \frac{8k(a_1)^3}{27} \left(1 - \frac{1}{2^{6n}} \right)$

(6)

$$\begin{aligned} U_n &= S_2 + S_4 + \cdots + S_{2n} \\ &= \frac{7k(a_1)^3}{3} \left(\frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^{12}} + \cdots + \frac{1}{2^{6n}} \right) \\ &= \frac{7k(a_1)^3}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2^6} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2^6}\right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{2^6}} \\ &= \frac{k(a_1)^3}{27} \left(1 - \frac{1}{2^{6n}} \right) \end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{U_n}{T_n} = \frac{\frac{k(a_1)^3}{27} \left(1 - \frac{1}{2^{6n}} \right)}{\frac{8k(a_1)^3}{27} \left(1 - \frac{1}{2^{6n}} \right)} = \frac{1}{8}$$

となる。

(答) $\frac{U_n}{T_n} = \frac{1}{8}$

[4]

(1)

$$\begin{aligned}\overline{\text{PA}} &= \overline{\text{OA}} - \overline{\text{OP}} = (-x, 2-y, 1) \\ \overline{\text{PB}} &= \overline{\text{OB}} - \overline{\text{OP}} = (2-x, -1-y, 2)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overline{\text{PA}} = (-x, 2-y, 1), \overline{\text{PB}} = (2-x, -1-y, 2)$$

(2)

条件より、 $\overline{\text{PA}} \perp \overline{\text{PB}}$ であるから、

$$\begin{aligned}\overline{\text{PA}} \cdot \overline{\text{PB}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-x, 2-y, 1) \cdot (2-x, -1-y, 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow -x(2-x) + (2-y)(-1-y) + 1 \cdot 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - y &= 0\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x^2 + y^2 - 2x - y = 0$$

(3)

(2)で求めた関係式を変形すると、

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 2x - y &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{5}{4} \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。また、 k を実数として、

$$2x - 3y = k \quad \cdots \textcircled{2}$$

すると、①と②が共有点を持てばよいので、

$$\begin{aligned}\frac{\left|2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-3) - k\right|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} &\leq \sqrt{\frac{5}{4}} \\ \Leftrightarrow \left|k - \frac{1}{2}\right| &\leq \frac{\sqrt{65}}{2} \\ \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{65}}{2} &\leq k - \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{65}}{2} \\ \therefore \frac{1 - \sqrt{65}}{2} &\leq k \leq \frac{1 + \sqrt{65}}{2}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1 - \sqrt{65}}{2} \leq 2x - 3y \leq \frac{1 + \sqrt{65}}{2}$$

(4)

$$\begin{aligned}|\overline{\text{PA}}| &= \sqrt{x^2 + (2-y)^2 + 1} \\ &= \sqrt{(x^2 + y^2 - 2x - y) + (2x - 3y) + 5} \\ &= \sqrt{k + 5} \\ |\overline{\text{PB}}| &= \sqrt{(2-x)^2 + (-1-y)^2 + 4} \\ &= \sqrt{(x^2 + y^2 - 2x - y) - (2x - 3y) + 9} \\ &= \sqrt{-k + 9}\end{aligned}$$

である。ここで $\angle\text{APB} = 90^\circ$ であるから、 $\triangle\text{PAB}$ の面積は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot |\overline{\text{PA}}| \cdot |\overline{\text{PB}}| &= \frac{1}{2} \sqrt{k+5} \cdot \sqrt{-k+9} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-k^2 + 4k + 45} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-(k-2)^2 + 49}\end{aligned}$$

である。したがって、 $k=2$ のとき、 $\triangle\text{PAB}$ の面積は最大値 $\frac{7}{2}$ をとる。

また、このとき、

$$|\overline{\text{PA}}| = |\overline{\text{PB}}| = \sqrt{7}$$

であるから、 $\triangle\text{PAB}$ は直角二等辺三角形である。したがって、

$$\angle\text{PAB} = 45^\circ$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値} \frac{7}{2}, \angle\text{PAB} = 45^\circ$$