

平成23年度入学者選抜試験問題

理学部数理科学科

数 学

前 期 日 程

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 解答用紙4枚と下書き用紙4枚は問題冊子とは別になっています。
- 3 問題は[1], [2], [3], [4]の4問です。
- 4 問題の解答を、それぞれ対応した番号の解答用紙に書きなさい。
- 5 試験中に問題冊子の印刷不鮮明・落丁・乱丁、解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- 6 監督者の指示にしたがって、4枚の解答用紙それぞれに学部名と大学受験番号を正しく記入しなさい。学部名と大学受験番号が正しく記入されていない場合は、採点できないことがあります。
- 7 定規は、使用してもかまいません。
- 8 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は持ち帰ってください。

[1] 座標空間内に 2 点 $A(0, 2, 1)$, $B(2, -1, 2)$ があり, 点 $P(x, y, 0)$ は $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$ を満たしながら動くものとする. このとき, 次の間に答えよ.

(1) $\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PB}$ を成分で表せ.

(2) x と y が満たすべき関係式を求めよ.

(3) x と y が (2) の関係式を満たすとき, $2x - 3y$ の値の範囲を求めよ.

(4) 三角形 PAB の面積の最大値を求めよ. また, そのときの $\angle PAB$ の大きさを求めよ.

- [2] 袋の中に5個の玉が入っている. それらは, 0 と書かれた玉が2個, 1 と書かれた玉, -1 と書かれた玉, 2 と書かれた玉がそれぞれ1個ずつである. この袋の中から3個の玉を取り出す. 取り出した3個の玉に書かれた数字の和を m とする. 次に, 袋の中に残った2個の玉に書かれた数字の積を n とする. このように定義された m と n のもとで, 2次関数

$$f(x) = x^2 - mx + n$$

を考える. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) m のとり得る値をすべて求めよ.
- (2) m と n のとり得る組合せ (m, n) をすべて求めよ.
- (3) m と n のとり得る組合せ (m, n) のすべてについて, それぞれが起こる確率を求めよ.
- (4) 不等式 $f(x) > 0$ がすべての実数 x について成り立つ確率を求めよ.
- (5) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる実数解 α, β をもち, 同時に $\alpha < 2$ かつ $\beta < 2$ となる確率を求めよ.

[3] 座標平面において、点 $(2, 0)$ を中心とする半径 2 の円を C とする。点 $(1, 0)$ を通る直線 l_1 と円 C との交点を A, B とし、点 $(3, 0)$ を通る直線 l_2 と円 C との交点を P, Q とする。さらに、 l_1 と l_2 は垂直に交わるとする。ただし、 l_2 は座標軸とは一致しない。 l_1 の傾きを k で表す。このとき、次の問に答えよ。

- (1) l_1 と l_2 の交点 D は円 C の内部にあることを示せ。
- (2) 弦 AB の長さを k を用いて表せ。
- (3) 弦 PQ の長さを k を用いて表せ。
- (4) 四角形 $APBQ$ の面積の最大値を求めよ。

- [4] 媒介変数 t を用いて $x = t^2$, $y = t^3$ と表される曲線を C とする. ただし, t は実数全体を動くとする. また, 実数 a ($a \neq 0$) に対して, 点 (a^2, a^3) における C の接線を l_a とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) l_a の方程式を求めよ.

(2) 曲線 C の $0 \leq t \leq 1$ に対応する部分の長さを求めよ. ただし, 曲線 $x = f(t)$, $y = g(t)$ の $\alpha \leq t \leq \beta$ に対応する部分の長さは

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \text{ で表えられる.}$$

(3) 曲線 C と 直線 l_1 で囲まれた図形の面積を求めよ.

(4) 曲線 C と 直線 l_1 で囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.